INTRODUÇÃO À TEORIA DAS DISTRIBUIÇÕES

SEGUNDO AS LIÇÕES DO PROF. **J. SEBASTIÃO E SILVA,** PROFERIDAS NO CENTRO DE ESTUDOS MATEMÁTICOS DO PORTO, EM 1956-57, E COMPILADAS POR ANTÓNIO ANDRADE GUIMARÃES.

PUBLICAÇÃO SUBSIDIADA PELO INSTITUTO DE ALTA CULTURA

DISTRIBUIÇÕES DE ORDEM INFINITA

AXIOMÁTICA DAS DISTRIBUIÇÕES

3ª lição

Começaremos por fazer algumas observações:

1ª - Em geral não faz sentido falar em valor de uma distribuição num ponto, e não é portanto correcta a notação T(x) para uma distribuição qualquer: na verdade, T(x) indicaria (por semelhança com o caso das funções) o valor da distribuição T no ponto x, - e tal valor não existe, em geral, para um ponto x arbitràriamente tomado no intervalo I.

Em todo o caso, para indicar que se trata de uma distribuição de uma variável x, e quando não houver perigo de confusão, não haverá inconveniente em escrever o símbolo T(x). Quando se tema confusão, o melhor é adoptar, com L. Schwartz, T_x, para indicar que se trata de uma distaibuição na variável x (variável independente de funções contínuas a partir das quais se definem as distribuições).

Assim, por exemplo, poderá usar-se a notação $\delta(x)$ para a distribuição δ de Dirac, desde que isso seja cómodo e não traga perigo de confusão. Mais geralmente ainda, a distribuição de Dirac relativa a um ponto a qualquer poderá designar-se pela notação $\delta(x-a)$; porém, será mais correcto designá-la pela notação $\delta_{(a)}$ proposta por Schwartz; e anàlogamente para as suas derivadas

$$\delta'(a) \; , \; \delta''(a) \; ;\ldots \; ; \ldots \; .$$

Será pois em geral

$$\delta^{(n)}_{(a)} = D^{n+1}\, H(x-a) = D^{n+2}\, G(x-a) \; ,$$

sendo G(x) a função contínua considerada no final da última lição.

2ª - O intervalo I em que as distribuições de ordem finita são definidas [como elementos do conjunto $\tilde{C}(I)$], diz-se domínio de existência ou simplesmente domínio de tais distribuições.

....

Embora não possa generalizar-se ás distribuições o conceito de valor num ponto, pode no entanto generalizar-se o conceito de restrição a um dado intervalo contido no seu domínio .

Recordemos pois o conceito de restrição aplicado a funções.

Dada uma função f(x), definida num conjunto D de pontos da recta, e sendo C um sub-conjunto de D, chama-se restrição da função f ao conjunto C a função que tem por domínio de existência o conjunto C, e que em cada ponto de C coincide com f(x).

Esta <u>nova</u> função representa-se pelo símbolo $R_C f$,ou,mais simplesmente por f_C.

Segundo o que dissemos,a função f_C tem por domínio o conjunto C,mas em cada ponto x de C,temos $f_C(x)=f(x)$;ora,como se sabe,basta que duas funções não tenham o mesmo domínio de existência para que não sejam a <u>mesma</u> função. Não é pois supérflua a introdução do conceito de <u>restrição</u> de uma função a uma parte do seu domínio. Por exemplo,- a função $\sqrt{|x|}$,cujo domínio de existência é o intervalo $]-\infty,+\infty[$,reduz-se no intervalo $[0,+\infty[$ à função $\sqrt{x}$ no entanto as funções $\sqrt{|x|}$ e $\sqrt{x}$ são evidentemente distintas.

Recordemos algumas propriedades desta operação chamada <u>restrição</u>:

a) $R_C(f+g) = R_C f+R_C g$

(pressupõe-se,que as funções f e g têm o mesmo domínio e que C é um sub-conjunto deste)

b) sendo f uma função continuamente derivável,temos

$$R_C Df = DR_C f \quad ,$$

circunstância esta que poderíamos traduzir dizendo que os operadores de <u>restrição</u> e de <u>derivação</u> são <u>comutáveis</u>,-caso incidam sôbre funções que admitam derivada contínua.

Certamente que,se quizermos generalizar a noção de <u>restrição</u> às distribuições,hà que atender àquelas propriedades. Basta, aliás,atender à 2ª propriedade..

Se considerarmos uma distribuição T de ordem finita no intervalo I,(será pois $T\in C_\omega(I)$),teremos $T=D^n f$,sendo f uma função contínua em I,e <u>n</u> um número natural. Suponhamos que pretendemos definir <u>restrição de T a um intervalo J</u> (1) <u>contido no domínio I de T</u>. Ora,é claro que se o operador de restrição,R_C definido para funções permuta (conforme vimos) com o operador D (de derivação), aquele operador comutará também com qualquer potência de D. No nosso objectivo,-definir o operador <u>restrição</u> para distribuições de ordem finita,da forma $D^n f$ necessàriamente,-somos assim naturalmente compelidos a adoptar a definição seguinte:

$$R_J T = D^n(R_J f) \quad ,$$

designando J um sub-intervalo do domínio I de distribuição T,e R_J o operador de <u>restrição ao intervalo J</u> .

....

(1) Só interessa,em teoria das distribuições,encarar a operação "restrição a um intervalo"e não a um sub-conjunto C qualquer de I

Mas, para que esta definição seja aceitável, será preciso antes de tudo que a operação restrição seja unívoca A questão da unicidade surge inevitàvelmente, se lembrármos que a mesma distribuição, T, se pode representar de várias maneiras; suponhamos, por exemplo, que

$$T = D^n f = D^m g$$

Sabe-se porèm que neste caso se deverá ter

$$\mathcal{J}^m f - \mathcal{J}^n g = P_{m+n} \quad ,$$

onde, manifestamente, supomos o polinómio P_{m+n} restringido ao intervalo I, domínio de T Ora, se aplicarmos o operador de restrição a ambos os membros, -como certamente o operador de restrição comuta com o de integração, - obtemos

$$\mathcal{J}^m R_J f - \mathcal{J}^n R_J g = P_{m+n} \quad ,$$

mantendo o símbolo para o polinómio presente no 2º membro, mas encarando-o agora restringido ao intervalo J, ao qual também se supõem feitas as restrições de f e g, $R_J f$ e $R_J g$

Mas a última igualdade escrita assegura a igualdade das restrições $R_J f$ e $R_J g$, -que são distribuições com o mesmo domínio, o intervalo J está assim demonstrada a unicidade do operador "restrição", $R_J T$. (O critério de igualdade de distribuições definidas num intervalo I, não depende evidentemente dêste intervalo: assim, no caso anterior, utilizámos para distribuições de domínio $J \subset I$ o mesmo critério de igualdade, sub-entendendo que o o perador J de primitivação se refere agora ao intervalo J, e que o polinómio P_{m+n} se supõe restringido a J) . Fica assim definida, mediante operador de restrição, uma aplicação do conjunto das distribuições de ordem finita definidas em I, $C_\omega(I)$, no conjunto das distribuições de ordem finita definidas em J, $C_\omega(J)$; é trivial verificar que esta aplicação é um homomorfismo, isto é, que sendo U e V elementos de $C_\omega(I)$, temos

$$R_J(U+V) = R_J U + R_J V,$$

e que comuta com o operador D de derivação:

$$R_J(DU) = D(R_J U) \ .$$

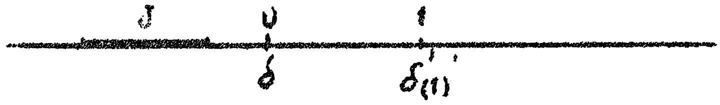
Por outro lado, isto habilita-nos desde já a fazer certas observações.

Quando restringimos uma distribuição a um intervalo menor que o seu domínio, podemos obter uma distribuição de ordem mais baixa, e até obter uma função contínua, e então já faz sentido falar em valor da distribuição num ponto.

É o que sucede, por exemplo, com a distribuição

$$T = \delta + \operatorname{sen} x + \delta'_{(1)}$$

É manifesto que, em qualquer intervalo cujos extremos sejam números negativos, -aquela distribuição reduz-se à função senx. Isto é, a restrição de T a qualquer intervalo J de extremos negativos é a função senx .



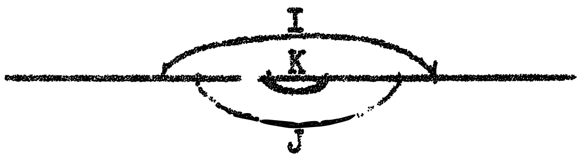
E fará então sentido escrever, por exemplo, $T(-\frac{\pi}{2})$, que é igual a $\mathrm{sen}(-\frac{\pi}{2})=-1$. Mas em qualquer intervalo que contenha a origem, ou o ponto 1, por menor que seja, já não será uma função, a respectiva restrição de T, e a locução "valor de T num ponto" dum tal intervalo carece de sentido.

Isto leva a adoptar a seguinte definição: "diz-se que duas distribuições U e V, de domínio I, são <u>iguais num intervalo $J \subset I$</u>, quando as restrições de U e V a J são iguais (1)". É uma definição natural, que proporciona uma grande comodidade de linguagem, uma vez que aproxima a linguagem relativa às distribuições da relativa ás funções.

....

Outra propriedade dos operadores de restrição, que imediatamente se verifica, é a seguinte:

Seja T uma distribuição, definida no intervalo I, e seja K um intervalo contido num intervalo J, por sua vez contido em I.



Temos então $$R_K(R_J T) = R_K T \ .$$

Antes de mostrar o interêsse que esta propriedade apresenta em teoria das distribuições, recordemos o seguinte: a um intervalo <u>fechado e limitado</u> é costume chamar intervalo <u>compacto</u>. Condensa- -se assim o significado de duas palavras numa só, -e de forma coerente, com o conceito geral de "conjunto compacto" em Topologia.

A questão importante que se levanta agora está ligada ao seguinte conceito:

Seja I um intervalo qualquer da recta, <u>aberto</u> ou não, <u>limitado</u> ou não.

Suponhamos que a <u>todo</u> o intervalo <u>compacto</u> J contido em I se faz corresponder uma distribuição T_J de <u>ordem finita</u>, definida em J, (i.e., $T_J \in C_\omega(J)$), de tal maneira que, sendo K um intervalo

....

(1) No sentido da <u>igualdade</u> de 2 distribuições definidas num dado intervalo, caracterizado na 2ª lição.

qualquer contido em J (e, portanto, contido em I), se tenha:

$$R_K T_J = T_K$$

dizemos então que se definir uma família $\{T_J\}$ <u>compatível</u> de <u>distribuições</u> associada ao intervalo I (1).

Apresenta-se então naturalmente a questão seguinte: dada uma tal família compatível de distribuições, associada ao intervalo I ¿ haverá uma distribuição de ordem <u>finita</u>, cuja restrição a cada intervalo <u>compacto</u> J contido em I, coincida precisamente com T_J ?

Vamos ver que, <u>se o intervalo I não fôr compacto, isso pode não acontecer</u>.

Seja I a recta, isto é, o intervalo $]-\infty,+\infty[$; consideremos, nos pontos de abcissa inteira positiva, a distribuição de Dirac, e suas derivadas (generalizadas) sucessivas: no ponto o, a distribuição δ ; no ponto 1, a derivada, $\delta'_{(1)}$; no ponto 2, a 2ª derivada, $\delta''_{(2)}$ etc, -no ponto n, a derivada de ordem n, $\delta^{n}_{(n)}$

Vejamos que podemos agora fàcilmente construir uma <u>família compatível de distribuições</u> associada ao intervalo I = $]-\infty,+\infty[$ -de modo tal que não exista uma distribuição de ordem finita nas condições do problema precedente.

Representemos por T_n a distribuição

$$\delta + \delta'_{(1)} + \ldots + \delta^{(n-1)}_{(n-1)} = \sum_{i=0}^{n-1} \delta^{(i)}_{(i)} \quad ;$$

no intervalo aberto $]-1,+1[$, temos $T_1 = \delta$;
no intervalo aberto $]-2,2[$, temos $T_2 = \delta + \delta'_{(1)}$

e assim sucessivamente.

Podemos agora definir uma família compatível de distribuições ligada à recta, da maneira seguinte: dado um intervalo qualquer, J, (isto é, dado um intervalo da recta, fechado e limitado), êle estará contido num intervalo $]-n,n[$ para um valor suficientemente grande de n, por isso mesmo que é limitado. (2)

Pois bem: para definir a família compatível que temos em vista, basta considerar, como distribuição associada ao intervalo

....

(1) Que pode, é claro, ser a recta inteira I = $]-\infty,+\infty[$.

(2) No que segue, importa considerar o intervalo $]-n,n[$ <u>mínimo</u> que contém J

(compacto) J,a restrição de T_n a J É muito fácil ver que fica assim definida uma família compatível de distribuições,associada à recta.

Mas também é fácil ver que não existe distribuição alguma de ordem finita sôbre a recta,cujas restrições àqueles intervalos coincidam com as distribuições que-pelo definição dada-constituem aquela família compatível. A razão dessa inexistência é esta: a ordem das distribuições T_n vai aumentando cada vez mais,à medida que os intervalos $]-n,n[$ se alargam,-isto é,a restrição de cada T_n a um intervalo compacto $J\subset]-n,n[$ não ficará a ser a derivada de ordem finita de uma função contínua sôbre a recta.

....

Este mesmo facto,-aquela carência de solução que o problema hà pouco pôsto assim apresenta,-é que nos vai encaminhar no sentido de uma generalização do conceito de distribuição: para aquele problema ser sempre possível,vamos ter que ampliar o conjunto $C_\omega(I)$ das distribuições finitas num intervalo I,considerando entidades de novo tipo,que se chamarão ainda distribuições,mas distribuições de ordem infinita

(Note-se que,-como já o acentuamos,-as distribuições de ordem finita bastam para a maioria das aplicações;mas as de ordem infinita interessam para certos fins,e um Curso sôbre Teoria das Distribuições não poderia deixar de mencionar,pelo menos,tôdas as distribuições consideradas por L. Schwartz).

Como fazer esta nova ampliação?

Convém apelar de novo para o símile das sucessivas generalizações do conceito de número.

Recordemos,por exemplo,a passagem do conjunto dos números racionais para o dos números reais: uma das maneiras de a efectuar consiste em considerar o conjunto das sucessões fundamentais de Cauchy,-aquelas que,depois vão tender para um limite,no campo ampliado. Há sucessões de Cauchy que não têm por limite número racional algum: pois bem,a partir dessas mesmas sucessões definem-se novos entes,que são chamados números reais (irracionais).

Aqui,passa-se qualquer coisa de semelhante. Designemos por $C_H(I)$ o conjunto de tôdas as famílias compatíveis de distribuições,associadas ao intervalo I (1)

....

(1) Tal como na teoria acima referida dos números reais,se considera o conjunto de tôdas as sucessões fundamentais de Cauchy,sem atender à sua convergência ou divergência dentro do campo racional.

Sejam $\{U_J\}$ $\{T_J\}$ $\{V_J\}$,os elementos de $C_\pi(I)$.

Podemos naturalmente definir em $C_\pi(I)$ uma adição,do modo seguinte:

$$\{U_J\} + \{V_J\} = \{U_J + V_J\}.$$

Para que tenha sentido uma tal definição,é evidentemente necessário que a família $\{U_J + V_J\}$ seja compatível,e mais ainda: seja univocamente determinada

A 1ª verificação é imediata:dado um intervalo compacto K , contido em J,temos,

$$R_K(U_J) = U_K \qquad R_K(V_J) = V_K$$

(por serem $\{U_J\}$ e $\{V_J\}$ famílias compatíveis)

Como,por outro lado,a restrição da soma é igual à soma das restrições,vem,adicionando aquelas igualdades ordenadamente,

$R_K(U_J) + R_K(V_J) = R_K(U_J+V_J) = U_K + V_K$,o que mostra bem serainda $\{U_J + V_J\}$ uma família compatível de distribuições,associada ao intervalo I . (O índice J aqui usado designa,como se viu,um intervalo compacto qualquer contido em I).

É fácil reconhecer que esta adição,além de sempre possível e uniforme,é associativa,comutativa e reversível,-quer dizer $C_\pi(I)$ é um grupo,a respeito daquela adição.

Podemos ainda definir em $C_\pi(I)$ um operador de derivação,$\tilde{D}$: basta escrever

$$\tilde{D}\{T_J\} = \{\check{D}T_J\} \quad ,$$

isto é,tomar como derivada da família compatível $\{T_J\}$ a família constituida pelas derivadas daquelas distribuições que constituem $\{T_J\}$. Impõe-se,claramente,a necessidade de reconhecer se o conjunto de distribuições $\{\check{D}T_J\}$ é ainda uma família compatível de distribuições,associada ao intervalo I tal verificação é imediata,tendo em conta a comutabilidade dos operadores de derivação e de restrição no conjunto $C_\omega(I)$ das distribuições de ordem finita em I . ...

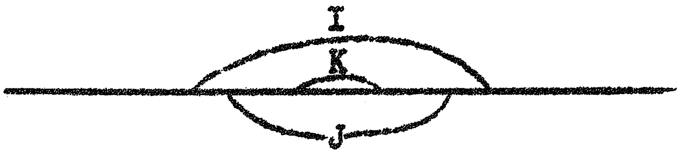
O operador $\tilde{D}$ de derivação,agora introduzido em $C_\pi(I)$,defini uma aplicação dêste conjunto em si mesmo; esta aplicação é até (como se reconhece sem dificuldade) um homomorfismo (1),a respeito da adição,isto é, a derivada da soma (de 2 elementos de $C_\pi(I)$)é igual à soma das derivadas.

Vejamos agora que se trata de uma ampliação daquele conjunto das distribuições de ordem finita,$C_\omega(I)$,que vinhamos considerando. ....

(1) Como se trata de uma aplicação do conjunto em si mesmo,tal homomorfismo diz-se um endomorfismo

Antes de mais, vejamos que $C_\pi(I)$ contém o conjunto $C(I)$ das funções contínuas no intervalo I. Tal como já sucedia com a inclusão $C(I) \subset C_\omega(I)$, o que acontece é na realidade o seguinte: existe uma parte de $C_\pi(I)$ que é isomorfa a $C(I)$, o que permite operar a sua substituição, dando-se assim significado à inclusão $C(I) \subset C_\pi(I)$.

A correspondência biunívoca, base daquele isomorfismo, define-se naturalmente nos termos seguintes:
consideremos uma família compatível de distribuições, associada ao intervalo I, $\{f_J\}$ constituida por funções contínuas, - o que significa manifestamente que, se fizer a restrição da função contínua f_J a um intervalo compacto K contido em J, obtenho precisamente a restrição da função f_K ao intervalo K .



É claro que se fôr considerando sucessivamente intervalos compactos, cada vez mais amplos, mas todos contidos em I, obtenho sempre uma restrição que é <u>contínua</u>, - isto é, hà uma e uma só função contínua, cuja restrição a cada intervalo compacto J (contido em I) é f_J Essa função contínua, f, identificámo-la com a família $\{f_J\}$

Melhor: a correspondência

$$f \longleftrightarrow \{f_J\}$$

é uma aplicação biunívoca do conjunto C(I) das funções contínuas em I sôbre o conjunto das famílias compatíveis de funções contínuas em I, (que é uma parte de $C_\pi(I)$, evidentemente). Então, iremos substituir cada família compatível de funções contínuas, presente em $C_\pi(I)$, pela função contínua que lhe corresponde, e - nesses termos - poderemos dizer que $C(I)$ está contido em $C_\pi(I)$.

Por outro lado, a adição que definimos em $C_\pi(I)$ coincide com a adição usual, no conjunto das funções contínuas, como fàcilmente se verifica.

Se tomarmos duas famílias compatíveis constituidas por funções contínuas, teremos por definição de adição em $C_\pi(I)$ -

$$\{f_J\} + \{g_J\} = \{f_J + g_J\}$$

isto é, a família - soma, $\{f_J + g_J\}$

é na verdade a correspondente à soma f+g das funções contínuas, f e g, correspondentes às famílias $\{f_J\}$ e $\{g_J\}$

Também é fácil ver que o operador de derivação coincide com o de derivação usual, no caso de funções continuamente deriváveis.

Suponhamos que se trata de derivar uma função que admita derivada contínua, -mas encarando-se essa função como família compatível de distribuições, isto é, como elemento de $C_\pi(I)$; seja $\{f_K\} = f$ essa função. Como vimos, a sua derivada é, por definição,

$$\tilde{D}\{f_K\} = \{\tilde{D}f_K\} = \{f'_K\} = f'$$

ou seja, $\tilde{D}\{f_K\}$ é a família $\{f'_K\}$ das derivadas f'_K no sentido usual; essa família correspondendo evidentemente ao elemento f' de $C(I)$, podemos identificá-lo com êste, escrevendo $\{f'_K\} = f'$

Outro facto a ter em conta é o seguinte:

Consideremos um elemento de $C_\pi(I)$, $\{T_J\}$, cuja derivada seja nula, $\tilde{D}\{T_J\} = o$. Visto que $\tilde{D}\{T_J\} = \{\tilde{D}T_J\}$, será $\tilde{D}T_J = o$, para todos os compactos $J \subset I$; ora, como os T_J designam distribuições de ordem finita, dali inferimos que todos os T_J são constantes, e portanto, $\{T_J\} = \{C_J\}$ = const.(1), fazendo a identificação já várias vezes referida.

Verificam-se, portanto, quási tôdas as propriedades que enumerámos na última lição, ao enunciar o problema que foi resolvido pela construção do conjunto $C^*(I)$:

a) o conjunto $C_\pi(I)$ é uma ampliação do conjunto $C(I)$ das funções contínuas no intervalo I ;

b) conseguimos definir em $C_\pi(I)$ uma adição, que coincide com a adição usual no conjunto $C(I)$ das funções contínuas em I ;

c) definimos em $C_\pi(I)$ um operador de derivação, homomorfismo de $C_\pi(I)$ em si mesmo, que coincide com a derivação usual no conjunto $C^1(I)$ das funções contìnuamente deriváveis;

d) ocorre ainda a circunstancia importante que apontamos em último lugar: se a derivada de um elemento dêste conjunto $C_\pi(I)$ é nula, êsse elemento reduz-se a uma constante.

Observe-se no entanto, que falta ainda verificar uma das cinco condições a que nos referimos. É precisamente, a 5ª condição (pag.18).

Ora, consideremos em $C_\pi(I)$ todos os elementos que se exprimem como derivadas, $\tilde{D}^n f$, de ordem finita, de funções contínuas $f \in C(I)$.

....

(1) Isto é, $\{T_J\}$ reduz-se a uma função constante no intervalo I

Este sub-conjunto de $C_{\pi}(I)$,constituido pelos elementos que são <u>derivadas de</u> ordem finita de funções contínuas em I,verifica tôdas as cinco condições do problema que foi considerado e resolvido na última lição. (pag.18). Que devemos concluir daqui ?

Tendo em vista o teorema que demonstramos (pag.28),concluimos que tal conjunto (sub-conjunto de $C_{\pi}(I)$) é necessàriamente <u>isomorfo</u> ao conjunto $C_{\omega}(I)$ das distribuições de ordem finita em I.
Em resumo: o conjunto $C_{\pi}(I)$ contém não só o conjunto C(I),como até um conjunto isomorfo ao conjunto $C_{\omega}(I)$ das distribuições de ordem finita em I : podemos então substituir esta parte de $C_{\pi}(I)$ por $C_{\omega}(I)$ o que nos habilita a escrever a dupla inclusão:

$$C(I) \subset C_{\omega}(I) \subset C_{\pi}(I)$$

[Note-se que não há presença efectiva de $C_{\omega}(I)$ em $C_{\pi}(I)$: deveríamos talvez adoptar notações diversas,para assinalar em $C_{\pi}(I)$ os elementos da parte isomorfa a $C_{\omega}(I)$ de modo a não os confundir com os do próprio conjunto $C_{\omega}(I)$. Mas foi já explicada suficientemente a <u>identificação</u> convencional a que se procede em casos como êste,sem que contradição alguma daí possa decorrer. O hábito de efectuar "identificações" desta ordem todos o temos aliás,desde que se começou a empregar por exemplo o mesmo símbolo,-1-para designar o <u>número inteiro</u> 1;o número racional 1,isto é,a classe $[n,n]$; o número real 1,isto é,a classe das sucessões fundamentais de limite 1;o número complexo 1,isto é,o par (1,o)] .

....

Fizemos pois uma nova ampliação:aos elementos do conjunto ampliado,$C_{\pi}(I)$,dá-se o nome de <u>distribuições</u>,ainda;-mas,aos elementos de $C_{\pi}(I)$ que não pertencem a $C_{\omega}(I)$,chama-se <u>distribuições de ordem infinita</u>. E existem,na verdade,distribuições de ordem infinita por exemplo,no caso da recta inteira,isto é, $I=]-\infty,+\infty,[$ é de ordem infinita a distribuição,já considerada,que se pode representar pela "série"

$$\sum_{0}^{\infty} \delta^{(n)}_{(n)}$$

Todavia,convém observar desde já o seguinte: se I é <u>compacto</u>,não chega a haver efectiva ampliação,porque os conjuntos $C_{\omega}(I)$ e $C_{\pi}(I)$ coincidem,(a menos dum isomorfismo). Basta,para o ver,reparar em que,no caso presente,entre os intervalos compactos J contidos em I,figura o próprio intervalo I: daqui se infere,de modo quási evidente,que $C_{\pi}(I)$ é isomorfr a $C_{\omega}(I)$.

Definimos até aqui, no conjunto $C_\pi(I)$, uma adição, e um operador $\tilde{D}$ de derivação; e poderemos agora também definir um operador de restrição. (Tínhamos já definido um operador de restrição para as distribuições de ordem finita, mas ainda não definimos tal operador no conjunto $C_\pi(I)$).

A definição do operador "restrição" no caso geral é dada nos seguintes termos: seja J um intervalo qualquer contido em I, e T uma distribuição definida em I, de ordem finita ou infinita. Essa distribuição será definida, segundo acabamos de ver, por uma família compatível de distribuições $\{T_K\}$, associada ao intervalo I.

Chamaremos restrição de T a J à família das restrições das componentes T_K de T ao intervalo J (1):

$$R_J T = \{R_J T_K\}.$$

Para esta definição ser consistente, deve ser $\{R_J T_K\}$ uma família compatível de distribuições em I-, o que aliás se reconhece fàcilmente. O operador "restrição" agora introduzido em $C_\pi(I)$ é unívoco, e comuta, com o operador $\tilde{D}$ da derivação.

Por outro lado, aplicando esta definição do operador de restrição, constatamos o seguinte:

a restrição de uma distribuição de ordem qualquer T, de domínio I (2), a um intervalo compacto $J \subset I$, é evidentemente uma distribuição de ordem finita, porque foi assim que nós definimos T, mediante a noção de família compatível; se

$$T = \{T_J\}, \text{é } R_J T = T_J \text{ , e } T_J \text{ é certamente}$$

uma distribuição de ordem finita.

Chegamos assim a êste resultado, que é muito importante:

"A restrição de uma distribuição qualquer, -de ordem finita ou infinita, definida num intervalo I, -a um intervalo compacto contido em I, é sempre uma distribuição de ordem finita".

Podemos agora caracterizar axiomàticamente o conjunto de todas as distribuições definidas em todos os intervalos da recta. Antes de o fazer, porém, façamos a observação seguinte:

....

(1) Por sugestão do que se passa com os vectores, aos elementos T_K da família compatível T chamaremos, por vezes, componentes da distribuição T.

(2) Se é o intervalo onde está definida uma distribuição T, de ordem finita ou infinita, I diz-se o domínio de T .

até aqui consideramos apenas distribuições em intervalos I;não será possível generalizar ainda mais o conceito de distribuição de modo que possa tomar-se como domínio não já um intervalo,mas sim um conjunto mais complicado? Isso é na verdade possível,mas essa generalização tem interêsse muito reduzido para as aplicações. Por isso mesmo,partiremos sempre do princípio de que o domínio de existência de uma distribuição será sempre um intervalo,que pode ser aberto ou fechado,limitado ou não.

....

Consideremos então a totalidade das distribuições definidas em intervalos da recta. Definimos,para tais distribuições,os conceitos de adição,derivação e restrição.

Vamos caracterizar axiomàticamente êste conjunto,tomando para noções primitivas precisamente aquelas.

Quer dizer: vamos fazer um resumo de tudo,apontando aquelas das propriedades das distribuições,a partir das quais se demonstrarão depois tôdas as outras. É isso o que se chama axiomàtizar uma teoria matemática.

Os axiomas que iremos adoptar serão os seguintes:

D_1 - Tôda a função f contínua,definida num intervalo I da récta,é uma distribuição.

D_2 - A cada distribuição corresponde um intervalo I da recta que se chama domínio da existência,ou apenas,domínio daquela distribuição,-de modo que se tal distribuição é uma função contínua,o domínio da distribuição é o domínio da função,no sentido usual..

D_3 - A cada distribuição T,de domínio I,corresponde uma distribuição com o mesmo domínio,que se representa por DT, e se chama "derivada de T",de tal modo que:

D_3' - Se T é uma função continuamente derivável (i.e.,com derivada contínua),DT coincide com a derivada dessa função no sentido usual;

D_3'' - Se DT=o,então T=const. (i.e.,T é uma função constante em I)

D_4 - A cada par de distribuição U e V com o mesmo domínio, corresponde uma distribuição com êsse domínio,que se chama soma de U e V,e se representa por U+V,de modo que:

D_4' - Se U e V são funções contínuas,U+V coincide com a soma das funções no sentido usual.

D_4'' - $D(U+V) = DU + DV$

D_5 - A cada distribuição T e a cada intervalo J,contido no domínio I daquela,corresponde uma distribuição,que se chama "restrição" de T a J,e se representa por $R_J T$,de modo que:

D_5'- Se T é uma função contínua,então $R_J T$,(restrição de T a J),coincide com a restrição da função àquele intervalo no sentido usual;

D_5''- $R_J(DT) = DR_J T$
(comutabilidade dos operadores de restrição e de derivação)

D_5'''- $R_J(U+V) = R_J U + R_J V$

$D_5^{(IV)}$- Se K é um intervalo contido em J

$$R_K(R_J T) = R_K T \ .$$

D_6- Se a cada intervalo <u>compacto</u> J contido num dado intervalo I associarmos uma distribuição T_J,de modo que,sendo K um intervalo compacto contido em J,se tenha:

$$R_K T_J = T_K$$

existe uma e só uma distribuição T,de domínio I,tal que

$$R_J T = T_J \ .$$

D_7- A cada distribuição T de domínio I,e a cada intervalo compacto $J \subset I$,corresponde um número natural n,e uma função f contínua em J,de tal maneira que

$$R_J T = D^n f \ ,$$

(quer dizer:em cada intervalo compacto,contido no seu domínio,a distribuição é de ordem finita)

Esta axiomática é <u>compatível</u>,isto é,<u>não é contraditória</u>. Isso decorre justamente do facto de termos construido uma estrutura que a verifica: trata-se do conjunto $C_\pi(I)$ com as noções de adição,de derivação e de restrição que nele definimos.

Por outro lado,atendendo a resultados conhecidos,e à marcha que seguimos na construção de $C_\pi(I)$,é fácil ver que qualquer outra estrutura E,com as noções de sôma,derivação e restrição,que verifique aquela mesma axiomática,é necessàriamente isomorfa daquela que já construimos: $C_\pi(I) \cong E(+,D,R_J)$.

Quer dizer:é possível estabelecer uma corrêspondencia biunívoca entre os elementos de $C_\pi(I)$ e os de $E(+,D,R_J)$,de tal modo que sejam respeitadas a adição,a derivação e o operador de restrição definidos em cada um daqueles conjuntos.

Simbòlicamente,sendo $\bar{U}$ e $\bar{V}$ os elementos de E,imagens de U e V (elementos de $C_\pi(I)$) naquela correspondência biunívoca,teremos.

$$U+V \longleftrightarrow \overline{U+V}$$
$$DU \longleftrightarrow D\bar{U}$$
$$R_J U \longleftrightarrow R_J\bar{U}$$

As estruturas de $C_\pi(I)$ e de E são pois <u>indiscerníveis</u> do ponto de vista das propriedades formais daquelas operações. Isto significa que a axiomática está <u>completa</u>: duas estruturas que a verifiquem são necessàriamente isomorfas; não podemos pois juntar mais nenhuma proposição que não seja <u>ou consequência daquelas</u> (teorema),ou <u>falsa</u>.

Tôdas as proposições que daqui em diante apresentarmos sôbre distribuições serão pois consequência lógica dos axiomas enumerados.

Pode preguntar-se: não haverá,além do que apresentamos,outras concretizações daquela axiomática?

Hà,- em 1ª lugar,a que apresentou o próprio Prof.L.Schwart segundo o qual as distribuições são funcionais lineares contínuas em certos espaços de funções indefinidamente deriváveis (como,possìvelmente,precisaremos noutra lição).

Depois,apareceu a concretização de König. Segundo König, as distribuições são <u>séries formais</u> de potencias de z, $\sum_k^\infty f_k z^k$, em que os coefecientes f_k são-não funções contínuas,-funções <u>localmente somáveis</u>,o que complica bastante a respectiva teoria;e a variável z acaba por ser interpretada como símbolo de derivação.

Por exemplo,(no caso da distribuição de ordem finita já considerada),teríamos,segundo König,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \delta^{(n)}_{(n)} = \sum_{o}^{\infty} D^{n+1}H(x-n) = \sum_{n=1}^{\infty} H\ (x-n).z^{n-1}$$

Vimos outra realização daquela axiomática: a que fomos construindo gradualmente,em primeiro lugar,as distribuições de ordem finita,e depois,as de ordem infinita.

Impunha-se a caracterização <u>axiomática</u> da estrutura das distribuições,portanto. É um caso semelhante ao que ocorreu com a teoria do <u>espaço de Hilbert</u>.

Em 1ª lugar,o espaço de Hilbert apareceu como o conjunto de tôdas as sucessões de números (reais ou complexos),

$$(x_1,x_2,\dots,x_n\dots)$$

que verificam a condição: a série $\sum_1^{\infty}|x_n|^2$ é convergente.

Esta maneira de apresentar o espaço de Hilbert correspondia à sistematização da Mecânica Quântica feita por Heisenberg,mediante o emprêgo de matrizes.

Depois surgiu a Mecânica Ondulatória,utilizando o espaço das funções de quadrado somável. Verificou-se que os dois espaços eram isomorfos. Finalmente,von Neumann fez a síntese: caracterizou axiomàticamente a estrutura do espaço de Hilbert,quer dizer - evidenciou as propriedades daquele espaço,a partir das quais tôdas as restantes se deduzem.

Convém aqui salientar a diferença entre os conceitos antigo e moderno de axiomática. Tôda a teoria dedutiva bem construída, deve ter por base uma axiomática,isto é,um sistema de proposições que não se demonstram (postulados ou axiomas),relativos a noções que não se definem (noções primitivas),de tal modo que:

1) tôda a proposição verdadeira da teoria seja demonstrável a partir dos postulados;

2) tôda a noção da teoria seja definível a partir das noções primitivas.

Segundo a concepção antiga,os axiomas eram considerados como "verdades de tal modo simples e evidentes que não carecem de demonstração" e as noções primitivas como "noções de tal modo elementares e imediatas que não precisam de ser definidas". Além disso, a axiomática referia-se a entidades únicas,determinadas (como,no caso da geometria euclideana,os pontos,as rectas e os planos).

Modeanamente,este ponto de vista está completamente superado. Uma axiomática é concebida à maneira dum sistema de equações, em que as incógnitas fôssem as noções primitivas. Pode haver estruturas que verifiquem e estruturas que não verifiquem a axiomática. Duas estruturas são consideradas como representando a mesma solução da axiomática,quando a verificam e são isomorfas

Ora o que interessa fundamentalmente é que a axiomática seja compatível,isto é,que tenha pelo menos uma solução-sem o que não poderia servir de base a uma teoria racional. Pode além disso ser determinada,univalente ou categórica,isto é,ter uma única solução. Mas também há axiomáticas não categóricas que nem por isso deixam de ter grande interêsse.Pode mesmo afirmar-se que uma das caracteristicas da matemática moderna é o estudo de teorias polivalentes,tais como a dos grupos,a dos corpos,a dos espaços vectoriais,a dos espaços topológicos,a dos espaços vectoriais topológicos,etc.etc.