INTRODUÇÃO À TEORIA DAS DISTRIBUIÇÕES

SEGUNDO AS LIÇÕES DO PROF. **J. SEBASTIÃO E SILVA,** PROFERIDAS NO CENTRO DE ESTUDOS MATEMÁTICOS DO PORTO, EM 1956-57, E COMPILADAS POR ANTÓNIO ANDRADE GUIMARÃES.

PUBLICAÇÃO SUBSIDIADA PELO INSTITUTO DE ALTA CULTURA

Interpretação das funções localmente somáveis e das medidas como distribuições de ordem finita

4ª lição

Vamos vêr como certas funções não contínuas, e mesmo as medidas em geral, podem ser incluidas na classe das distribuições.

Notemos que certas funções descontínuas se apresentam naturalmente como derivadas de funções contínuas; por exemplo, a função de Heaviside, $H(x)$, é a derivada da função $G(x)$, referida no final da 2ª lição:

$$H(x) = DG(x)$$

Esta função, $G(x)$, não tem derivada na origem (possue apenas derivadas laterais) mas a função de Heaviside não necessita ser definida na origem.

Como vimos, o facto de $H(x)$ ser derivada da função contínua $G(x)$ levou-nos a escrever

$$\delta = \mathcal{D}^2 G, \text{ou mais simplesmente, } \delta = D^2 G$$

empregando ainda o símbolo D para significar "derivação generalizada".

Mas só agora vamos vêr como se justifica esta igualdade com todo o rigôr. Mais ainda: vamos interpretar tôdas as <u>funções localmente somáveis</u> como distribuições, identificando-as a determinadas distribuições.

I

Diz-se que uma função, definida num intervalo I da recta, é <u>localmente somável</u> naquele intervalo, quando é somável (isto é, integrável no sentido de Lebesgue) <u>em todo o intervalo compacto</u> contido em I.

A teoria do integral de Lebesgue só em pequena parte é necessária para a sequência destas lições. Limitar-nos-emos por isso a recordar as propriedades mais importantes do integral de Lebesgue, à medida que forem necessárias.

Antes de mais, observe-se que o integral de Lebesgue é uma generalização do conceito do integral de Riemann: tôda a função tegrável segundo Riemann é integrável segundo Lebesgue, e o valor dos integrais é o mesmo. Todavia, a recíproca não é verdadeira: há funções integráveis segundo Lebesgue, que o não são segundo Riemann

Um exemplo muito simples é a <u>função de Dirichlet</u>, $D(x)$, definida do modo seguinte:

$$D(x) = \begin{cases} 1 \text{ ,para } x \text{ irracional} \\ \\ 0 \text{ ,para } x \text{ racional} \end{cases}$$

Esta função não é integrável segundo Riemann,e é integrável segundo Lebesgue (veremos adiante a justificação deste facto).

Um caso muito notável de funções,para as quais não existe integral de Riemann,e existe integral de Lebesgue é o das funções que admitem integrais impróprios (segundo Riemann) absolutamente convergentes.

Como se sabe,há duas espécies de integrais impróprios:os de 1ª espécie,e os de 2ª espécie. Os integrais impróprios de 1ª espécie são integrais em que o intervalo de integração é limitado,mas a função não é limitada nêsse intervalo;nos integrais impróprios de 2ª espécie,o intervalo de integração não é limitado.

Sabe-se que a definição do integral de Riemann exige que a função integranda seja limitada,e que seja limitado o intervalo de integração.

Portanto,qualquer daqueles casos está fóra do conceito do integral de Riemann. Nos cursos clássicos de Cálculo Infinitesimal efectua-se então uma generalização do conceito do integral de Riemann,mediante uma passagem ao limite.

Por exemplo: consideremos o integral $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$

A função $\frac{1}{\sqrt{x}}$ torna-se infinita no intervalo $[0,1]$,-não é pois integrável segundo Riemann.

Mas é habitual definir êste integral impróprio,escrevendo

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{u \to 0^+} \int_u^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{u \to 0^+} \left[2\sqrt{x}\right]_u^1 =$$

$$= \lim_{u \to 0^+} \left[2\sqrt{1} - 2\sqrt{u}\right] = 2$$

Como o limite em causa existe e é finito,diz-se que o integral impróprio $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ é convergente.

Existe uma estreita analogia entre o estudo dos integrais impróprios e o das séries,-analogia essa que leva a adoptar a terminologia da teoria das séries para êstes integrais. Por isso,também se diz que um integral impróprio é absolutamente convergente, quando é convergente o integral do módulo da função integranda

Pois bem: quando isso acontece,o integral impróprio pertence à categoria,muito mais vasta,do integral de Lebesgue,-com o mesmo, valor,bem entendido. Quer dizer:o integral de Lebesgue é uma generalização do integral de Riemann, que abarca aquele caso dos integrais impróprios absolutamente convergentes.

É o caso do integral hà pouco estudado, porque $\left|\frac{1}{\sqrt{x}}\right| = \frac{1}{\sqrt{x}}$, e o integral é pois absolutamente convergente.

Mas seja agora

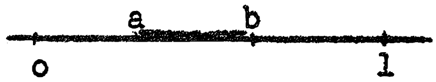
$$\int_0^1 \frac{dx}{x}$$

Seguindo o mesmo caminho, teremos:

$$\int_0^1 \frac{dx}{x} = \lim_{u \to 0^+} [\log 1 - \log u]$$

Ora, êste limite já não é finito: o integral é divergente. A função, muito simples, $y = \frac{1}{x}$, não é aliás integrável segundo Lebesgue (não é somável) no intervalo fechado $[0,1]$, nem mesmo no intervalo semi-aberto $]0,1]$.

Mas é localmente somável no intervalo $]0,1]$, isto é, é integrável em todo o intervalo compacto contido naquele. Na verdade, se tal intervalo é compacto, é limitado e fechado: os seus extremos a e b são necessàriamente positivos; ora, em tal caso, a função $\frac{1}{x}$ é contínua em $[a,b]$, e o integral existirá (em $[a,b]$) mesmo segundo Riemann.



Portanto, por maioria de razão, existe segundo Lebesgue.

Pode até dizer-se que a função $\frac{1}{x}$ é localmente somável no intervalo $]0,+\infty[$, e também em $]-\infty,0[$. Enfim, é localmente somável em qualquer intervalo que não contenha a origem; pelo contrário, não é localmente somável em todo o intervalo que contenha a origem.

Posto isto, consideremos em geral uma função f, localmente somável num intervalo I qualquer. Fixemos arbitràriamente um ponto c dêsse intervalo, e ponhamos

$$\mathfrak{J} f = \int_c^x f(t)\, dt = F(x)$$
(integral segundo Lebesgue)

Prova-se que F(x) é função contínua.

Portanto, $\mathfrak{J}$ é um operador que faz corresponder a cada função localmente somável naquele intervalo, uma função contínua, que se chamará naturalmente uma função primitiva de f; será natural chamar, por sua vez, a f, derivada de F, e escrever $f = DF$, convenção esta que se justifica aliás por motivos mais profundos, que adiante exporemos.

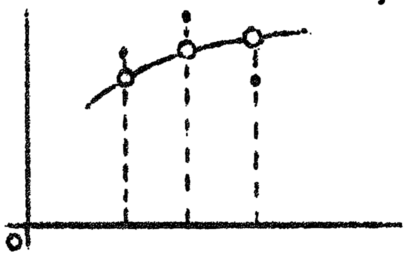
Consideremos duas funções, f_1 e f_2, que tenham a mesma função primitiva, $F(x)$ Será então $F = \mathfrak{J} f_2 = \mathfrak{J} f_1$

Se f_1 e f_2 são funções <u>contínuas</u>, tendo a mesma primitiva, são necessàriamente iguais: $f_1 = f_2$; mas se não impusermos a f_1 e f_2 a condição de continuidade, deixa de ter lugar necessàriamente a <u>igualdade</u> entre f_1 e f_2 . Este resultado é um pouco surpreendente, porque equivale à existência de duas funções distintas, f_1 e f_2, tais que

$$f_1 = DF \qquad f_2 = DF$$

Por outras palavras: a mesma função, F, pode ter duas <u>derivadas diferentes</u> ! A operação "derivação" deixa de ser unívoca.

De resto isso ocorre já com o próprio integral de Riemann: se modificarmos os valores de uma função (integrável segundo Riemann) num número <u>finito</u> de pontos, obtemos uma função, sem dúvida <u>distinta</u> da anterior, mas <u>com o mesmo integral</u> (segundo Riemann). Podíamos aliás efectuar aquela modificação do valor da função numa infinidade de pontos que verificasse certas condições conhecidas.



Mas, colocando-nos no quadro do integral de Lebesgue, qual <u>é a condição necessária e suficiente para que duas funções localmente somáveis num certo intervalo, tenham o mesmo integral nêsse intervalo</u> ?

Prova-se que essa condição é a seguinte: f_1 e f_2 devem ser <u>iguais</u>, <u>excepto</u> (quando muito) nos pontos de um conjunto de <u>medida nula</u>. (Medida segundo Lebesgue) .

Recordemos o que se entende por <u>conjunto</u> de <u>medida nula</u>, segundo Lebesgue.

Diz-se que um conjunto (de pontos da recta) tem <u>medida nula</u> (segundo Lebesgue) quando, dado um número positivo arbitrário, ε , é sempre possível cobrir o conjunto com uma família (eventualmente infinita) de intervalos, de modo tal que a soma dos comprimentos dêstes seja inferior a ε (Um tal conjunto diz-se também, por vezes, <u>conjunto menosprezável</u>)

Prova-se que todo o <u>conjunto numerável</u> tem <u>medida nula</u> ! Então, o conjunto dos <u>números racionais</u> (que é numerável, como se sabe) terá medida nula segundo Lebesgue. A função de Dirichlet, $D(x)$, é pois igual a 1, excepto nos pontos de um conjunto de medida nula: o seu integral, segundo Lebesgue, em qualquer intervalo da recta, é portanto o mesmo que o da função constante, $f \equiv 1$, no mesmo intervalo.

A função de Dirichlet é pois integrável segundo Lebesgue, em qualquer intervalo da recta, como se tinha afirmado anteriormente.

Quando a igualdade $f_1(x) = f_2(x)$ se verificar, excepto (quando muito) nos pontos de um conjunto de medida nula, diz-se (em francês) que as funções f_1 e f_2 são iguais <u>presque partout</u>. (Em inglês, <u>almost everywhere</u>). Traduziremos esta expressão por "quási em todos os pontos". Pôsto isto, convencionaremos dizer que duas funções <u>localmente somáveis</u> f_1 e f_2, definidas num mesmo intervalo, são <u>equivalentes</u>, e escrever

$$f_1 \sim f_2$$

quando tais funções forem iguais em quási todos os pontos daquele intervalo. (É imediato reconhecer que se trata efectivamente de uma relação de equivalência. A sua transitividade decorre do facto seguinte, de muito fácil verificação: a reunião de dois conjuntos menosprezáveis é ainda um conjunto menosprezável).

Esta relação de equivalência determina no conjunto das funções localmente somáveis naquele intervalo, uma partição em classes disjuntas de elementos equivalentes. Seja $[f]$ a classe de tôdas as funções localmente somáveis, equivalentes à função f.

Designemos por $L^1_c(I)$ o conjunto-quociente assim obtido, - quer dizer, o conjunto das <u>classes</u> de funções localmente somáveis equivalentes. Costuma representar-se por $L^1(I)$ o conjunto das funções <u>somáveis</u> em I, conjunto manifestamente contido no anterior. É também evidente que os dois conjuntos coincidem se (e só se) o intervalo I é compacto

Podemos definir, de modo muito simples, uma adição e uma multiplicação neste conjunto $L^1_c(I)$. Basta escrever:

$$[f] + [g] = [f+g]$$
$$[f].[g] = [f.g]$$

Como sempre que se definem operações em conjuntos quocientes, o primeiro cuidado a ter é reconhecer a <u>coerência</u> da definição- isto é, verificar que o resultado não depende dos representantes escolhidos para as classes sôbre as quais a operação incide. Tal verificação equivale a assegurar a <u>unicidade</u> da operação em causa, o seu carácter unívoco. Nas operações acima definidas em $L^1_c(I)$, é imediata essa verificação.

Também se reconhece que a adição ali definida é, (além de sempre possível e unívoca), <u>associativa, comutativa e reversível</u> - quer dizer: $L^1_c(I)$ é um <u>grupo comutativo</u>, a respeito daquela adição.

Uma classe $[f] \in L^1_c(I)$ diz-se <u>contínua</u>, quando admite como representante (pelo menos) uma função, f, contínua. Existe òbviamente um isomorfismo entre o grupo aditivo C(I) e o grupo das classes, elementos de $L^1_c(I)$, que nós chamamos contínuas. Podemos então operar aquela substituição já por nós praticada em várias circunstâncias análogas, - isto é, <u>identificar</u> a classe $[f]$, contínua, com a função contínua, f, que a representa: escrever, pois, $[f] = f$

Nestas condições, o conjunto C(I) das funções contínuas no intervalo I ficará contido em $L^1_c(I)$; isto é, $C(I) \subset L^1_c(I)$.

Por outras palavras ainda C(I) é um sub-grupo de $L^1_c(I)$.

Em geral, por comodidade de linguagem (e quando isso não acarrete perigo de confusão) chama-se ainda <u>funções localmente somáveis</u> às próprias classes que constituem $L^1_c(I)$; correlativamente, essas classes são representadas pelos mesmos símbolos que designam usualmente as funções "representantes" de tais classes. É claro que as "classes" não são as "funções": adoptar o mesmo termo para significar entes distintos, é certamente incorrecto; mas a comodidade daí decorrente é na verdade grande. Hà que chamar, no entanto, a atenção, para os cuidados que é preciso ter ao fazer uso desta linguagem abreviada, que é hoje, de resto, familiar mesmo aos físicos e aos técnicos, dotados de cultura matemática que compreenda a teoria do espaço de Hilbert e em particular os desenvolvimentos de funções em séries de funções ortogonais, etc.

Em particular (uma vez adoptada aquela convenção) <u>não</u> se poderá mais falar <u>em valor de uma função</u> (localmente somável) <u>num ponto</u>: como está em causa a <u>classe</u> das funções equivalentes a uma dada, f, se alterarmos o valor de f num ponto <u>a</u>, permanecemos certamente na mesma classe, uma vez que a "nova" função difere da inicial apenas num ponto (conjunto de medida nula). Ora, permanecer na mesma classe, é (segundo aquela convenção de linguagem) encarar a <u>mesma função</u> localmente somável, cujo valor não existe portanto, uma vez que hà possibilidade de o fixar.

No ínicio da 3ª lição, frisámos que não é possível falar de valor de uma distribuição num ponto: pois bem, isso mesmo já acontecia com as classes de funções localmente somáveis, isto é, as funções localmente somáveis, - no sentido lato da expressão.

Quando pusemos

$$\mathfrak{J} f = \int_c^x f(t)\, dt = F(x) \; ,$$

e dissemos que f era a <u>derivada</u> de F, $f = DF$,esta convenção exige (segundo dissemos) uma explicação mais profunda.

Na verdade,prova-se que a função $F(x)$ admite <u>derivada</u>"présque partout". E demonstra-se ainda que se tem $F'(x) = f(x)$, présque partout, o que justifica escrever-se $f=DF(x)$.

Simplesmente,qualquer função que seja <u>equivalente</u> a f será ainda derivada de F,e,portanto,-o que será natural fazer para restabelecer a unicidade da derivação,é pôr,por definição, $DF = [f]$

Assim,já podemos dizer que a derivada de uma função F é única. E as funções que,como F,admitem como derivada uma mesma classe $[f]$ (chamadas <u>primitivas</u> de F) são ainda as funções que diferem de F por uma constante.

Vamo-nos assim encaminhando para a estrutura das <u>distribuições</u>. Convém,no entanto,caracterizar prèviamente as <u>funções contínuas que são primitivas de funções localmente somáveis</u>.

Essa caracterização foi feita por Vitali,mediante o conceito de <u>função absolutamente contínua</u>,-conceito êste que depende do de <u>variação de uma função num intervalo</u>.

Seja $[a,b]$ um intervalo compacto: consideremos uma partição dêste intervalo mediante um número finito de pontos,

$x_o = a < x_1 < \dots\dots < x_{n-1} < x_n = b$; e em correspondência com esta partição,o somatório

$$\sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})| .$$

Por definição,<u>variação total</u> (ou absoluta) da função f em $[a,b]$,é o número (que se designa por $V_f[a,b]$),<u>supremo</u> de tôdas as somas que se podem formar por aquele processo:

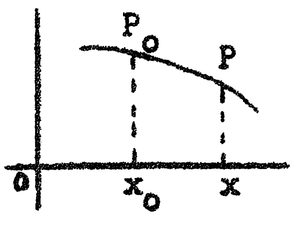
$$V_f[a,b] = \sup \sum_{i=1}^{n} | f(x_i)-f(x_{i-1})|$$

Se V_f é <u>finita</u>,diz-se que f é uma <u>função de variação limitada</u>. (Como se sabe,êste conceito desempenha papel essencial no estudo da <u>rectificação das curvas</u>)

Por outro lado,diz-se que $f(x)$ <u>é absolutamente contínua</u> no ponto x_o,quando fôr

$$\lim_{x \to x_o} V_f[x_o,x] = o$$

Este conceito pode exprimir-se de modo mais sugestivo,por via geométrica:



A função f(x) é absolutamente contínua no ponto x_o, quando o comprimento do gráfico da função, compreendido entre os pontos de abcissas x_o e x, tende para o, quando x tende para x_o. (Prova-se a equivalência destas duas maneiras de definir a continuidade absoluta de uma função num ponto).

Se a função fôr absolutamente contínua em todos os pontos de um intervalo, diz-se que a função em causa é absolutamente contínua naquele intervalo.

Pois bem: Vitali provou que as funções que são primitivas de funções localmente somáveis num intervalo I são precisamente as funções absolutamente contínuas nêsse intervalo. Note-se que, òbviamente, estas funções são contínuas e de variação limitada em cada intervalo compacto: constituem pois um sub-conjunto do conjunto C(I) das funções contínuas em I.

E assim somos levados a fazer corresponder à derivada de cada função absolutamente contínua, a distribuição que é derivada formal dessa função contínua. Isto é, sendo F absolutamente contínua, (e portanto, DF uma função localmente somável), estabelece-se a correspondência $DF \longleftrightarrow \tilde{D}F$ entre o conjunto das funções localmente somáveis no intervalo I e uma parte de $C_\omega(I)$.

Esta correspndência é biunívoca: na verdade, diz-se que $\tilde{D}F_2=\tilde{D}F_1$, isto é, $\tilde{D}(F_2-F_1)=o$, quando F_2 e F_1 diferem por uma constante; ora, sucede então que as funções DF_1 e DF_2 coincidem e reciprocamente [Não esquecer que estamos a chamar "funções"(localmente somáveis) ás classes, elementos de $L^1_c(I)$]

Existe pois uma correspondência biunívoca entre uma parte(1) do conjunto $C_1(I)$ das distribuições de ordem 1 em I, e o conjunto $L^1_c(I)$ das funções localmente somáveis em I. Ora, esta correspondência biunívoca é até um isomorfismo a respeito da adição definida em $L^1_c(I)$ e no conjunto das distribuições. De facto, a soma de duas funções localmente somáveis (isto é, das derivadas (2) de duas funções absolutamente contínuas) pode representar-se sob a forma DF_1+DF_2

....

(1) Precisamente: a parte constituida pelas distribuições que são derivadas (generalizadas) de funções absolutamente contínuas em I

(2) no sentido usual

Como o conceito de derivada para as funções absolutamente contínuas verifica a aditividade habitual, temos $DF_1+DF_2=D(F_1+F_2)$; ora, na correspondência biunívoca em causa, à função localmente somável $D(F_1+F_2)$ corresponde em $C_1(I)$, a distribuição $\tilde{D}(F_1+F_2)$, a qual por sua vez, é igual a $\tilde{D}F_1+\tilde{D}F_2$ O facto, agora verificado, de as somas DF_1+DF_2 e $\tilde{D}F_1 + \tilde{D}F_2$ se corresponderem, prova que a correspondência biunívoca de que vimos tratando é um <u>isomorfismo</u>.

Podemos pois efectuar a habitual "substituição" da parte causa de $C_1(I)$ pelo conjunto $L^1_c(I)$ das funções localmente somáveis.

Feita essa identificação, podemos afirmar que tem lugar a inclusão seguinte:

$$C(I) \subset L^1_c(I) \subset C_1(I)$$

Nestas condições, a que chamaremos <u>derivada de ordem n</u> de uma função localmente somável, $[f]$?

Não esqueçamos que, sendo D o operador da derivação usual, $f=D\mathfrak{J}f$, uma vez que, não dando embora a operação $D\mathfrak{J}$ precisamente a "mesma função, dá certamente a mesma classe, que é o que importa. (Note-se que $[f]$ está agora identificada a uma distribuição).

Então, teremos

$$\tilde{D}^n[f] = \tilde{D}^n\,[D\mathfrak{J}f] = \tilde{D}^n.D[\mathfrak{J}f]$$;ora, sendo $\mathfrak{J}f$ contínua, a derivação $\tilde{D}$ confunde-se com a derivação D, usual, o que permite escrever finalmente

$$\tilde{D}^n\,[f] = \tilde{D}^{n+1}\,[\mathfrak{J}f] \quad .$$

Em conclusão: a teoria das distribuições permite ir mais longe do que poderia parecer à primeira vista; não atribue apenas uma derivada de qualquer ordem às funções contínuas, -atribue também uma derivada de qualquer ordem a <u>tôda a função localmente somável</u>.

Observe-se que agora, e só agora, está plenamente justificado escrever

$\delta = \tilde{D}H$, ou mantendo o símbolo usual, $\delta = DH$, segundo a teoria expôsta.

Porque, sendo as distribuições derivadas de funções contínuas, e não sendo a função de Heaviside, H, função contínua, DH não seria uma distribuição. Mas H é função <u>localmente somável</u>; podemos portanto escrever $\delta = \tilde{D}H$, ou $\delta = DH$, adoptando o símbolo D para a derivação generalizada, sempre que isso não suscite confusão

....

Antes de ver como se interpretam as medidas no quadro das distribuições, convém ver como-pelo contrário, certas funções, embora simples, não se podem interpretar como distribuições.

Por exemplo: a função $\frac{1}{x}$. Vimos já que em qualquer intervalo que contenha a origem, tal função não é localmente somável, embora o seja em qualquer intervalo que não contenha a origem. Esta função não é interpretada como "distribuição".

Nos cursos clássicos de Cálculo Infinitesimal, aprende-se que uma primitiva de $\frac{1}{x}$ é $\log|x|$, para $x \neq o$, evidentemente. Ora, essa primitiva não é única; a totalidade dessas primitivas, todavia não é redutível à forma $\log|x| + C$, designando C uma constante arbitrária.

Essa totalidade (o "integral indefinido" de $\frac{1}{x}$) é constituida por tôdas as funções da forma

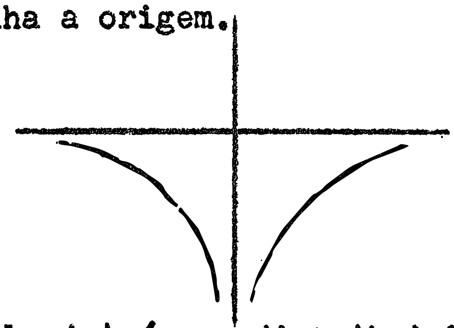
$$F(x) = \begin{cases} \log|x| + C_1 & \text{para } x < o \\ \log|x| + C_2 & \text{para } x > o \end{cases},$$

designando C_1 e C_2 duas constantes arbitrárias.

Tomando $C_2 - C_1 = c$, a expressão geral daquelas primitivas poderá assumir a forma

$$(\alpha) \qquad F(x) = \log|x| + C_1 + cH(x)$$

É bem visível que as primitivas de $\frac{1}{x}$ não diferem por uma constante arbitrária: isto chega para não se poder identificar $\frac{1}{x}$ com uma distribuição. De resto $\log|x|$ é <u>localmente somável</u> em qualquer intervalo que contenha a origem: quando x tende para <u>o</u>, à direita ou à esquerda, $\log|x|$ tende para ∞ mas muito lentamente. (É até um infinitamente grande de ordem inferior a qualquer número real) . Daí resulta ser $\log|x|$ localmente somável em qualquer intervalo que contenha a origem.



Portanto, $\log|x|$ é uma distribuição.

Derivando a precedente igualdade (α), tendo em vista as regras válidas para a derivação de distribuições, viria:

$$\tilde{D}F(x) = \frac{1}{x} + o + c\delta = \frac{1}{x} + c\delta$$

quer dizer, existem infinitas distribuições que correspondem a $\frac{1}{x}$. Não se pode pois identificar $\frac{1}{x}$ com <u>uma</u> distribuição.

Este facto explica uma igualdade paradoxal que Dirac apresenta no seu livro de Mecânica Quântica: $\frac{1}{x} = \frac{1}{x} + c\delta$, da qual deduz fórmulas importantes para aquela teoria. É que na verdade $\frac{1}{x}$ não é uma distribuição,-mas sim uma classe de infinitas distribuições,que diferem tôdas por múltiplos de δ

Entre as infinitas distribuições correspondentes a $\frac{1}{x}$, convém destacar uma:

$$\tilde{D}\log|x| = Pf\frac{1}{x} \quad (\underline{\text{parte finita}} \text{ de } \frac{1}{x})$$

(No 1º membro,deriva-se uma função localmente somável)

Trata-se de uma distribuição muito importante para as aplicações,em Física.

Mais geralmente,
$$Pf\frac{1}{x^n} = \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}\tilde{D}^n \log|x|$$

Donde vem esta locução,"parte finita"? Foi empregeda pelo próprio Schwartz segundo a orientação funcional que este seguiu, definem-se as distribuições de tal modo que é preciso considerar certos integrais impróprios,cuja parte finita é depois destacada. Daí a designação,associada ao símbolo Pf

....

É oportuno agora apresentar a interpretação das medidas como distribuições.

Como se viu na 1ª lição,chama-se medida uma função numeràvelmente aditiva sôbre a família $\mathcal{B}_X$ dos borelianos limitados da recta.

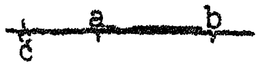
Na teoria das distribuições,uma medida não deve ser concebida como uma massa,como se tem feito até aqui; deve ser encarada como uma densidade. Por isso mesmo,a notação diferencial $d\mu$ que se usa nos integrais,não é aqui aconselhável; é preferível escrever $\mu_t dt$,ou mesmo,$\mu(t)dt$,onde t designa a variável independente.

Como se viu,o integral entre um ponto c arbitrário,e x,da medida μ ,dá justamente a medida do intervalo $[c,x]$:

$$\Phi(x) = \int_c^x \mu_t dt = \mu([c,x])$$

Chamamos Φ uma primitiva desta medida,que se pode aliás reconstituir a partir de $\Phi(x)$,de maneira simples. Observemos que

$$\Phi(b)-\Phi(a) = \mu(]a,b])$$



Porquê o intervalo semi-aberto $]a,b]$? Porque $\Phi(b)$ dá a massa contida em $[c,b]$; $\Phi(a)$ dá a massa contida em $[c,a]$; subtraindo estas massas,obtemos evidentemente a massa contida no intervalo $]a,b]$,aberto à esquerda,uma vez que pode acontecer estar presente no ponto <u>a</u> uma massa não nula.

Demonstra-se ainda que a medida dum intervalo fechado $[a,b]$ pode então ser dada pela fórmula

$$\mu([a,b]) = \Phi(b) - \Phi(a^-)$$

em que $\Phi(a^-)$ representa <u>o limite</u> de $\Phi(x)$ à <u>esquerda</u> de a (que existe sempre, neste caso).

De resto, quando conhecemos o valor da medida para intervalos fechados, podemos passar para reuniões de intervalos, complementares, etc. - enfim, para qualquer boreliano.

E agora, é natural preguntar: como caracterizar, do ponto de vista da teoria das funções, aquelas funções, $\Phi(x)$, que se obtêm integrando medidas? Prova-se que são precisamente as <u>funções de variação limitada em cada intervalo compacto do seu domínio</u>. Isto é, dada arbitràriamente uma função $F(x)$ naquelas condições e, pondo (por definição)

$$\mu([a,b]) = F(b) - F(a^-),$$

fica determinada uma medida sôbre a família dos borelianos limitados, a partir dos valores de μ para os intervalos compactos. (Isto é um facto; que se demonstra). E a medida assim obtida diz-se <u>derivada</u> da função F de variação limitada, - a qual, por sua vez, se chama <u>função primitiva</u> de μ $\qquad \mu = DF$.

Prova-se que duas primitivas da mesma medida diferem por uma constante necessàriamente. Por outro lado, sabe-se que as funções de variação limitada são funções somáveis - mesmo segundo Riemann É um facto muito conhecido, que para funções reais da variável real, decorre da integrabilidade à Riemann das funções monótonas.
Em conclusão: as funções de variação limitada em cada intervalo compacto do seu domínio são localmente somáveis e, portanto, distribuições.

Isto permite-nos proceder a uma nova identificação, decorrente de um isomorfismo que se pode definir nos termos seguintes: façamos corresponder à derivada de tôda a função F, de variação limitada num intervalo compacto, $\tilde{D}F$, a medida DF, (<u>medida</u> no sentido hà pouco precisado).

Fica assim definida uma correspondência entre uma parte do conjunto $C_w(I)$ das distribuições de ordem finita em I, e as "medidas construidas a partir de funções de variação limitada em cada intervalo compacto contido em I $\quad$ Esta correspondência é <u>biunívoca</u>; é até um <u>isomorfismo</u>, porque se $\quad \tilde{D}F_1 \longleftrightarrow DF_1 \quad \tilde{D}F_2 \longleftrightarrow DF_2$
é também

$$\tilde{D}F_1 + \tilde{D}F_2 = \tilde{D}(F_1+F_2) \longleftrightarrow D(F_1+F_2) = DF_1 + DF_2 ,$$

em face da definição que é natural adoptar para soma de duas medidas: por definição, soma de duas medidas, μ_1 e μ_2, é a que faz corresponder a cada intervalo (em geral: a cada boreliano X) a soma das medidas de X segundo μ_1 e μ_2

$$(\mu_1+\mu_2)(X) = \mu_1(X)+\mu_2(X) \quad \text{, para todo o } X\in\mathcal{B}_I$$

Em conclusão: a correspondência $\tilde{D}F \longleftrightarrow DF$ (F, função de variação limitada em todo o intervalo compacto), estabelece um isomorfismo entre as medidas sôbre um intervalo qualquer I da recta, e as derivadas das funções de variação limitada em qualquer intervalo compacto contido em I. Somos assim convidados a fazer uma nova identificação: a das "medidas" com certas distribuições de ordem finita.

Observe-se que, efectuada a identificação do conjunto M(I) das medidas sôbre I com a parte de $C_\omega(I)$ que lhe é isomorfa, podemos por sua vez definir derivada de qualquer ordem de uma medida; - e assim é que, não só as funções localmente somáveis, mas também as medidas passam a ter derivadas de qualquer ordem.

Aliás, uma função localmente somável f também se identifica a uma medida:

$$f \longleftrightarrow \int_a^x \mu_t dt = \int_a^x f(t)dt$$; o último integral define uma medida, μ_t.

Em resumo, obtemos mediante as sucessivas identificações por isomorfismo que apontámos, a seguinte cadeia de inclusões:

$$C(I) \subset L^1_c(I) \subset M(I) \subset C_\omega(I) \quad .$$

É agora oportuno definir o conceito de ordem de uma distribuição segundo Schwartz . (Até aqui, demos apenas o conceito de ordem segundo König).

Schwartz define o conceito de ordem a partir do conceito de medida:

as distribuições de ordem 1 são as medidas;

as distribuições de ordem 2 são as derivadas das medidas que não sejam aliás medidas; e assim sucessivamente.

Nesta nomenclatura, a função δ de Dirac (-que é uma medida, por ser derivada da função H de Heaviside, que é de variação limitada), é uma distribuição de ordem 1; a derivada δ' (da qual se prova que não é uma medida) é uma distribuição de ordem 2 .