INTRODUÇÃO À TEORIA DAS DISTRIBUIÇÕES

SEGUNDO AS LIÇÕES DO PROF. **J. SEBASTIÃO E SILVA,** PROFERIDAS NO CENTRO DE ESTUDOS MATEMÁTICOS DO PORTO, EM 1956-57, E COMPILADAS POR ANTÓNIO ANDRADE GUIMARÃES.

PUBLICAÇÃO SUBSIDIADA PELO INSTITUTO DE ALTA CULTURA

MULTIPLICAÇÃO DE UMA FUNÇÃO INDEFINIDAMENTE DERIVÁVEL POR UMA DISTRIBUIÇÃO

5ª lição

Vimos o que se entende por "soma" de duas distribuições com o mesmo domínio. E dissemos já que o problema da definição do "produto" de duas distribuições arbitrárias é muito mais delicado: oportunamente se patenteará em que consistem, precisamente, as dificuldades de uma tal definição, no caso geral.

Certos casos particulares são, no entanto, de resolução muito mais simples. Por exemplo, o produto de um número natural $\underline{n}$ por uma distribuição T define-se a partir da adição, como se costuma fazer em qualquer grupo aditivo:

$$\begin{cases} 1.T = T \\ n.T = (n-1)T + T \quad \text{para } n=2,3,\ldots \end{cases}$$

Por outro lado é natural pôr $o.T=o$ e $(-n)T=-(nT)$. (1)

Vamos ver que, mais geralmente, é possível definir o produto de uma função indefinidamente derivável por uma distribuição qualquer de ordem finita, segundo o princípio da conservação das regras de cálculo. (Como veremos, esta definição inclui as anteriores como casos particulares).

Ao definir a adição de distribuições, procuramos manter a regra da derivação da soma; agora, ao definir o produto em questão, procuraremos manter a regra da derivação do produto.

Recordemos a definição de "função indefinidamente derivável" num intervalo: é tôda função numérica $\varphi(x)$ que admite derivadas (necessàriamente contínuas) de tôdas as ordens nêsse intervalo.

$$\varphi,\ \varphi',\ \varphi'',\ldots,\ \varphi^{(n)},\ldots$$

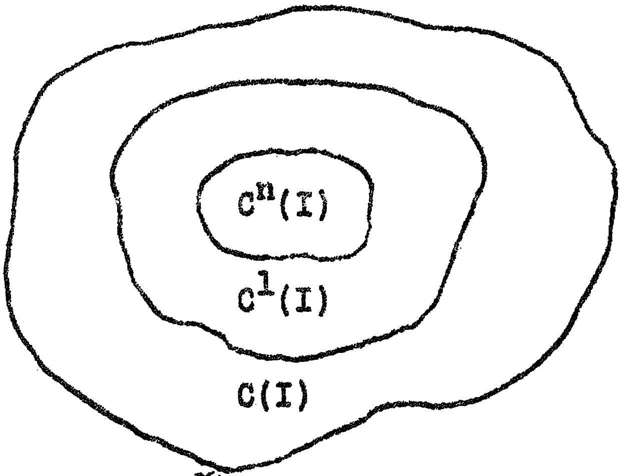
Tínhamos já considerado o conjunto $C^n(I)$ das funções n vezes continuamente deriváveis, isto é, que admitem derivada contínua, até à ordem $\underline{n}$, inclusivè; é manifestamente válida a seguinte cadeia de inclusões:

$$\ldots\subset C^n(I)\subset C^{n-1}(I)\subset\ldots\subset C^1(I)\subset C(I)$$

....

(1) A distribuição nula (que representaremos ainda por $\underline{o}$) é, evidentemente, a função idênticamente nula. Cada distribuição de ordem finita, $T=D^nf$, admite como simétrica, òbviamente, a distribuição $-T=D^n(-f)$. Por sua vez, cada distribuição de ordem infinita $T=\{T_J\}$ admite como simétrica a distribuição $-T=\{-T_J\}$.

Figuremos num diagrama a inclusão sucessiva dos conjuntos $C^n(I)$



A intersecção, $\bigcap_{n=0}^{\infty} C^n(I)$, de todos estes conjuntos será evidentemente; o conjunto das funções indefinidamente deriváveis no intervalo I, que é natural representar por $C^{\omega}(I)$; temos pois

$$C^{\omega}(I) = \bigcap_{n=0}^{\infty} C^n(I)$$

Por outro lado, já tinhamos definido o conjunto $C_{\omega}(I)$ das distribuições de ordem finita I, e verificado que se tem:

$$C_{\omega}(I) = \bigcup_{n=0}^{\infty} C_n(I) \quad ,$$

designando $C_n(I)$, como se convencionou, o conjunto das distribuições de ordem $\leq n$ sôbre I .

Em resumo: $C^{\omega}(I)$ é o conjunto das funções (indefinidamente deriváveis) que admitem derivadas de tôdas as ordens no <u>sentido usual</u>; $C_{\omega}(I)$, o conjunto das distribuições de ordem finita, as quais admitem derivadas de tôdas as ordens no <u>sentido formal</u>.

Pois bem, propomo-nos resolver o seguinte problema: " associar a cada função indefinidamente derivável num intervalo I, $\varphi \in C\ (I)$, e a cada distribuição de ordem finita em I, $T \in C_{\omega}(I)$ uma distribuição de ordem finita, que representaremos por φT, (será pois $\varphi T \in C\ (I)$), e a que chamaremos "produto" de φ por T, de modo que sejam verificadas pelo menos as seguintes condições:

I) Se T é uma função contínua em I, então φT coincide com o produto de φ por T, encarado no sentido usual;

II) "regra de derivação do produto":

$$D(\varphi T) = \varphi DT + (D\varphi).T$$

Para maior simplicidade de notações, escreveremos daqui em diante φ' em lugar de $D\varphi$.

Vamos seguir, na resolução do problema enunciado, o método do problema resolvido - isto é,: vamos supôr que é possível definir uma correspondência: $(\varphi,T) \longleftrightarrow \varphi T$ nas referidas condições.

Observe-se, antes de mais, que a condição II) pode apresentar-se com a forma:

$$(\text{II}') \qquad \varphi DT = D(\varphi T)-\varphi' T$$

Comecemos po supôr que T é uma função contínua: $T=f$, com $f \in C(I)$ Será então, segundo (II'),

$$\varphi Df = D.(\varphi f)-\varphi' f \ .$$

Suponhamos agora que a distribuição em causa, T, não é uma função contínua, mas sim derivada duma função contínua: $T = Df$.

A condição (II') dá então

$$\varphi D^2 f = D(\varphi.Df)-\varphi' Df = D\left[D(\varphi.f)-\varphi' f\right]-\left[D(\varphi' f)-\varphi'' f\right] ,$$

uma vez que, sendo φ indefinidamente derivável em I, também o será φ', o que permite escrever, (mudando em (II') φ em φ'),

$$\varphi' Df = D(\varphi' f)-\varphi'' f$$

Ou ainda,

$$\varphi D^2 f = D^2(\varphi f)-2D(\varphi' f) +\varphi'' f$$

O segundo membro faz lembrar o desenvolvimento do quadrado duma diferença.

Isto sugere a extensão ao caso da derivada de ordem <u>n</u>:

$$(1) \quad \varphi D^n f = D^n(\varphi f) - nD^{n-1}(\varphi' f) + \binom{n}{2} D^{n-2}(\varphi'' f)-\dots +(-1)\varphi^{(n)} f,$$

ou mais concisamente,

$$(1') \qquad \varphi D^n f = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \binom{n}{k} D^{n-k}(\varphi^{(k)} f)$$

Não sabemos ainda se esta generalização é legítima: mas podemos tentar confirmá-la pelo método da <u>indução completa</u>.

A fórmula (1') é válida, evidentemente, para n=o: reduz-se então à igualdade

$$(2) \qquad \varphi D^o f = \varphi f$$

Resta mostrar que, admitindo a sua validade para n, é ainda verdadeira para n+1

Ora, passa-se de n para n+1, recorrendo à propriedade II), que supomos válida (estamos a supôr o problema resolvido), e que dá:

$$\varphi D^{n+1} f = D(\varphi D^n f) - \varphi' D^n f \ , \qquad (3)$$

pondo $\quad T = D^n f$

Tendo em vista (3), é agora fácil deduzir a validade da fórmula (1') para o caso de n+1, supondo-a verdadeira para n:

o método é muito semelhante ao que permite justificar, por indução completa, a fórmula do binómio de Newton. Empregam-se as conhecidas relações entre os coeficientes binomiais:

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

Não vale pois a pena efectuar essa verificação final da indução, que é como que um decalque daquele raciocínio da Álgebra elementar.

Em conclusão: se o nosso problema é resolúvel, a solução só pode ser dada pela fórmula

$$(1') \qquad \varphi\, D^n f = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} D^{n-k}(\varphi^{(k)} f) ,$$

uma vez que, sendo $T \in C_\omega(I)$, necessàriamente T é da forma $T = D^n f$, e (1') dará então a expressão do produto $\varphi T = \varphi . D^n f$.

O problema, a ser possível, só comporta aquela solução. Mas precisamos, primeiro que tudo, averiguar se o produto de φ por $T = D^n f$ a que a fórmula (1') conduz é unívoco, isto é, se não depende da representação adoptada para T .(como derivada de ordem n de f).

Trata-se pois de demonstrar a unicidade do produto $\varphi . T$ dedefinido por (1'), mediante a representação de T como derivada de certa ordem de uma função contínua em I.

Em primeiro lugar, repare-se em que o 2º membro de (1') tem sentido. Na verdade, $\varphi^{(k)}$, função indefinidamente derivável (tal como φ) é contínua, assim como f; o respectivo produto, $\varphi^{(k)} f$, é pois uma função contínua. A correspondente derivada de ordem $n-k$, $D^{n-k}(\varphi^{(k)} f)$, é portanto uma distribuição; ora, sendo evidentemente $\binom{n}{k}$ um número natural, o símbolo $\binom{n}{k} D^{n-k}(\varphi^{(k)} f)$ representa uma distribuição, como se viu no início desta lição, - e por conseguinte, o segundo membro de (1') é a soma de $n+1$ distribuições.

Para maior comodidade de escrita, durante a demonstração, convencionaremos representar o 2º membro de (1') - que, como acabamos de vêr, é uma distribuição, - pelo símbolo

$$L_{\varphi, n}(f)$$

Trata-se de um operador, dependente de φ e n, que, a cada função contínua em I, $f \in C(I)$, faz corresponder uma distribuição de ordem finita em I.

Podemos formular a definição deste operador por recorrência:

$$(4) \qquad \begin{cases} L_{\varphi, o}(f) = \varphi f & \text{[segundo (2)-pág.61]} \\ L_{\varphi, n+1}(f) = D\, L_{\varphi, n}(f) - L_{\varphi', n}(f) & \text{, para } n = o, 1, 2, \ldots\ldots \\ & \text{[segundo (3)-pág.61]} \end{cases}$$

É com as relações (4) que iremos trabalhar, sempre que estiver em causa o operador $L_{\varphi,n}(f)$.

Em primeiro lugar, é fácil reconhecer (por indução completa) que

$$(5) \qquad L_{\varphi,n}(f+g) = L_{\varphi,n}(f) + L_{\varphi,n}(g)$$

(Para n=o, esta igualdade é manifestamente válida; e fàcilmente se prova que, admitindo a sua validade para n, esta persiste para n+1)

Outra importante propriedade do operador $L_{\varphi,n}(f)$ que vamos demonstrar é a seguinte: " Se f é uma função que admite derivada contínua em I, então

$$(6) \qquad L_{\varphi,n}(f) = L_{\varphi,n-1}(f') \qquad \text{(para } n=1,2,\dots\text{)"}$$

Seguindo o método da indução completa, comecemos por provar que a fórmula é válida no caso n=1: (não hà lugar para o caso n=o evidentemente). Trata-se de mostrar que, sendo f derivável e f' contínua, se tem

$$L_{\varphi,1}(f) = L_{\varphi,o}(f') \quad .$$

Recorrendo à segunda s relações (4), com n=o, vem

$$L_{\varphi,1}(f) = D\, L_{\varphi,o}(f) - L_{\varphi',o}(f)$$

Por hipótese, f' existe e é contínua; então, o produto φf pode derivar-se à maneira usual.

Por outro lado, segundo o que já vimos, podemos escrever

$$L_{\varphi,o}(f) = \varphi.f \quad ;$$
$$L_{\varphi',o}(f) = \varphi'.f$$

Portanto,

$$L_{\varphi,1}(f) = D\,(\varphi f) - \varphi' f = \varphi' f + \varphi f' - \varphi' f = \varphi f'$$

A fórmula é pois válida para n=1, uma vez que $\varphi f' = L_{\varphi,o}(f')$

Suponhamos agora que a igualdade (6) é válida para n; provemos que então subsiste para n+1 .

Voltando a recorrer à 2ª das relações (4),

$L_{\varphi,n+1}(f) = D\, L_{\varphi,n}(f) - L_{\varphi',n}(f)$, e observando que a hipótese da indução permite escrever

$$L_{\varphi,n}(f) = L_{\varphi,n-1}(f')$$

$L_{\varphi',n}(f) = L_{\varphi',n-1}(f')$, concluimos que

$$L_{\varphi,n+1}(f) = D\, L_{\varphi,n-1}(f') - L_{\varphi',n-1}(f')$$

Ora, o 2º membro desta última igualdade, segundo a referida relação (4), não é mais do que $L_{\varphi,n}(f')$. Então, ficou provado que

$$L_{\varphi,n+1}(f) = L_{\varphi,n}(f') \ ,$$

e com isto, terminada a prova (por indução completa) da relação (6)

Quer dizer: <u>derivando a função f, não alteramos o valor do operador</u> $L_{\varphi,n}(f)$ <u>se simultâneamente diminuir-n de uma unidade</u>.

Mais geralmente, sempre que a função f admita derivada <u>contínua</u> (no sentido usual) até à ordem p inclusivè, podemos escrever:

$$L_{\varphi,n}(f) = L_{\varphi,n-p}(f^{(p)}) \ \text{,para } n=p,p+1,\ldots.n-1$$

Com estes resultados, podemos empreender agora a demonstração da <u>unicidade</u> do produto φT.

Fomos hà pouco convidados a tomar como definição do produto da função $\varphi \in C^{\omega}(I)$ pela distribuição

$T = D^n f \in C_{\omega}(I)$, o 2º membro da igualdade

$$\varphi . D^n f = \sum (-1)^k \binom{n}{k} D^{n-k}(\varphi^{(k)} f)$$,ou seja, abreviando

$$\varphi . D^n f = L_{\varphi,n}(f)$$

Queremos provar que esta regra de multiplicação de φ por T é unívoca, -isto é, que o resultado não depende da <u>representação</u> adoptada para a distribuição T Concretamente: sendo $D^m g$ outra representação de T, e portanto $D^n f = D^m g = T$, queremos mostrar que

$$L_{\varphi,n}(f) = L_{\varphi,m}(g) \ .$$

Ora, vimos já que é sempre possível reduzir duas derivadas de ordens diferentes à mesma <u>ordem</u>; em particular, é possível escrever

$$T = D^{m+n} F = D^{m+n} G \text{ ,tomando}$$

$$F = \mathcal{J}^m f \quad , \quad G = \mathcal{J}^n g$$

Por outro lado, sendo $D^n f = D^m g$, sabe-se que existe um polinómio P_{m+n} de gráu inferior a m+n, tal que

$$\mathcal{J}^m f - \mathcal{J}^n g = P_{m+n} \text{ ,ou seja } F - G = P_{m+n} \text{ ou}$$

ainda:

$$F = G + P_{m+n} \ .$$

Adoptando para T a representação $T = D^{m+n}F$, o produto de φ por T será (segundo a definição, cuja unicidade está em causa)

$$L_{\varphi,m+n}(F)$$

Mas, tendo em vista a última propriedade do operador $L_{\varphi,n}(f)$ que estabelecemos, é fácil concluir que

$$L_{\varphi,m+n}(F) = L_{\varphi,n}(f) .$$

Na verdade, sendo F primitiva de ordem m de f, é uma função m vezes continuamente derivável; a sua derivação sucessiva até à ordem m reconduz à função f, e não altera o operador presente no 1º membro da última igualdade, desde seja acompanhada da mudança de n+m em n+m-m=n; está pois aquela igualdade justificada.

Por outro lado, e tendo em vista a distributividade do operador $L_{\varphi,n}(f)$ que atraz estabelecemos (pág.62), podemos escrever sucessivamente:

$$L_{\varphi,m+n}(F) = L_{\varphi,n+m}(G+P_{m+n}) = L_{\varphi,m+n}(G)+L_{\varphi,n+m}(P_{m+n})$$

Ora, sendo o grau do polinómio P_{m+n} inferior à m+n, podemos derivá-lo m+n vezes, obtendo afinal a derivada (função contínua, por ser constante) nula Sabe-se que essa derivação m+n vezes repetida não altera o "valor" do operador, desde que simultâneamente se mude m+n em m+n-(m+n) = o Isto é:

$$L_{\varphi,m+n}(P_{m+n}) = L_{\varphi,o}(o)$$

E é evidente que $L_{\varphi,o}(o) = \varphi \circ o = o$, uma vez que $\varphi .o$ é o produto usual das funções contínuas φ e o

Temos pois apenas

$$L_{\varphi,m+n}(F) = L_{\varphi,m+n}(G)$$

Uma vez que $G = \mathcal{J}^n g$, um raciocínio análogo aos que acabámos de fazer permite (notando que $D^nG = g$), escrever

$$L_{\varphi,m+n}(G) = L_{\varphi,m}(g)$$

Quer dizer:

$$L_{\varphi,m+n}(F) = L_{\varphi,n}(f) = L_{\varphi,m}(g)$$

A última igualdade traduz a <u>unicidade</u> do produto $\varphi.T$, que procurávamos estabelecer. <u>Mas resta ainda saber se a definição de produto dada pela igualdade</u> $\varphi D^n f = L_{\varphi,n}(f)$ <u>satisfaz ou não às condições</u> I) e II) <u>exigidas</u>.

Vamos ver que sim.

Para vêr que a 1ª condição é satisfeita, basta atender a que, se T é uma função contínua, T é a derivada de ordem <u>o</u> de f, isto é, $T = D^o f$ Então, a nossa definição de produto dá

$$\varphi T = \varphi . D^o f = L_{\varphi,o}(f) = \varphi . f$$,produto no sentido usual.

Quanto à condição II) (permanência da regra de derivação do produto), trata-se afinal de provar que

$$\varphi . DT = D(\varphi T) - \varphi' . T \quad .$$

Ora, T é a derivada de certa ordem de uma função contínua, f $T = D^n f$.

Substituindo, fica:

$$\varphi . D^{n+1} f = D(\varphi . D^n f) - \varphi' . D^n f \quad .$$

Em termos do operador $L_{\varphi,n}(f)$,a última igualdade escrita assume a forma

$$L_{\varphi,n+1}(f) = DL_{\varphi,n}(f) - L_{\varphi',n}(f)$$

É, precisamente, esta a 2ª das relações (4), que nos serviram para definir por recorrência aquela família de operadores (pag.62) .

<u>**O nosso problema está pois resolvido, e, como vimos, comporta uma só solução: a decorrente das igualdades**</u>

$$\varphi . T = \varphi . D^n f = L_{\varphi,n}(f)$$

Podemos até resumir as conclusões da análise feita sob a forma de

TEOREMA. "<u>Existe uma, e uma só, aplicação</u>

$$(\varphi, T) \longleftrightarrow \varphi . T$$

<u>de</u> $C^\omega(I) \times C_\omega(I)$ <u>em</u> $C_\omega(I)$, <u>que verifica as condições</u> I) e II) <u>exigidas</u> (pág.60)

É possível provar ainda que o produto $\varphi . T$ verifica, além das condições fundamentais I) e II), outras propriedades muito importantes; referiremos as seguintes:

$$(\varphi + \psi)T = \varphi T + \psi T$$
$$\varphi(T+U) = \varphi . T + \varphi . U$$
$$\varphi(\psi T) = (\varphi\psi) . T$$
$$1 . T = T$$

sendo φ e ψ elementos arbitrários de $C^\omega(I)$, T e U elementos arbitrários de $C_\omega(I)$ e sendo 1 a função constante igual ao número 1 (função indefinidamente derivável, evidentemente).

A verificação destas importantes propriedades é quási imediata, salvo a da 3ª (associatividade) que exige um raciocínio de recorrência um pouco mais elaborado. (semelhante aliás ao que permitiu demonstrar a <u>unicidade</u> do produto $\varphi.T$).

....

Em particular, podemos definir o produto de um número complexo α por uma distribuição de ordem finita, T (É claro que α se identifica a uma função constante, $\varphi(x) \equiv \alpha$: trata-se, evidentemente, de uma função indefinidamente derivável, com derivadas tôdas nulas).

Ora, sendo $T = D^n f$, com $f \in C(I)$, teremos segundo a definição de produto adoptada,

$$\alpha . D^n f = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} D^{n-k}(\alpha^{(k)} . f)$$

Manifestamente, em todos os termos deste somatório correspondentes a todo o valor de $k>0$, é $\alpha^{(k)}=0$, isto é, todos os termos se anulam, excepto o primeiro; ficará pois

$$\alpha . D^n f = D^n(\alpha f) .$$

Quer dizer: mantém-se a conhecida regra de derivação de funções: " a derivada do produto de uma função por uma constante, é igual ao produto dessa constante pela derivada da função".

Em particular, se α fôr um número natural, n, isto é, $\alpha = n$, verifica-se que o produto nT (daquela forma definido) coincide com o que definimos no início desta lição.

....

É agora conveniente recordar aqui algumas propriedades de Álgebra abstracta, que permitem sistematizar melhor o que acaba de dizer-se.

Chama-se <u>anel</u> todo o conjunto A, onde estão definidas duas operações - uma <u>adição</u> e uma <u>multiplicação</u> - com as seguintes propriedades:

Adição	Multiplicação
a) Sempre possível e uniforme;	a) Sempre possível e uniforme;
b) Associativa;	b) Associativa;
c) Comutativa;	c) Distributiva, à esquerda e à direita, em relação à adição: $a(b+c) = ab + ac$, $(a+b)c = ac + bc$, para quaisquer a,b,c em A;
d) Reversível, isto é, dados dois elementos a e b de A, existe sempre um elemento $x \in A$ tal que $a+x = b$. (Por outras palavras, a subtracção é sempre possível). Em particular, existe um elemento, "elemento neutro", que habitualmente se designa por o, tal que, para todo o $a \in A$, $a+o = a$.	Não se exige que a multiplicação seja comutativa.

Note-se que as propriedades da adição em A podem resumir-se dizendo que o conjunto A é um grupo comutativo (ou abeliano) a respeito da adição.

Quando a multiplicação fôr comutativa, diz-se que A é um anel comutativo.

Não existe necessàriamente em A um elemento neutro da multiplicação, isto é, um elemento 1 tal que $1.a = a.1 = a$, para todo o $a \in A$. Quando um tal elemento existir, diz-se que A é um anel com elemento um-ou elemento unidade.

Chama-se corpo um anel A comutativo que verifique a seguinte condição suplementar:

Dados dois elementos a,b de A, com $b \neq o$, existe sempre um elemento x de A tal que $bx = a$.

Exemplos.

Um exemplo simples e importante de anel comutativo é constituido pelo conjunto de tôdas as funções contínuas na recta inteira. Suponhamos definidas nêsse conjunto, que representaremos por C(R), a adição e a multiplicação segundo a maneira usual.

Imediatamente se reconhece que se trata efectivamente de um anel comutativo; não é porém um corpo, como vamos vêr. Consideremos, por exemplo, as funções senx e cosx; pertencem evidentemente a C(R). Existirá em C(R) uma função, f(x), tal que: $\cos x . f(x) = \operatorname{sen} x$? Não existe: a solução desta última equação é, como se sabe, a função "tangente": $f(x) = \operatorname{tg} x$, que não é contínua em tôda a recta, e não pertence pois a C(R).

De modo mais geral, podemos dizer que $C(I)$, qualquer que seja o intervalo, I da recta, não é um corpo, embora seja sempre um anel comutativo: basta que uma função $f(x) \in C(I)$ se anule num ponto do intervalo I, para que não exista $\varphi(x) \in C(I)$ tal que $f(x)\varphi(x) \equiv 1$, por exemplo. Pela mesma razão, também não é um corpo o conjunto $C^{\omega}(I)$ das funções indefinidamente deriváveis no intervalo I: é apenas um anel comutativo. Para reconhecer que se trata de um anel, recorde-se que a soma (ou a diferença) de duas funções indefinidamente deriváveis é uma função indefinidamente derivável, tal como com o produto acontece.

Pôsto isto, ocorre preguntar: será possível definir em $C_{\omega}(I)$ uma multiplicação de modo que êste conjunto, com a adição que já lá definimos, se tome um anel, -um sôbre-anel do anel $C(I)$ das funções contínuas em (I) ? A resposta é negativa: prova-se que não é possível definir uma multiplicação de duas distribuições arbitrárias de ordem finita, que seja associativa e mantenha a regra de derivação do produto, -coincidindo no conjunto inicial, $C(I)$, com o produto usual de funções. Demonstraremos êste facto capital mais adiante.

Convém recordar ainda outra importante conceito de Álgebra abstracta: o de módulo sôbre um anel

Dado um anel A com elemento um, 1 e um conjunto E, diz-se que E é um A-módulo, ou um módulo sôbre o anel A quando tiverem lugar as condições seguintes:

1ª - está definida em E uma adição, a respeito da qual E é um grupo comutativo[1];

2ª - pode fazer-se corresponder a cada par (α, u), constituido por um elemento α de A e um elemento u de E, um elemento $\alpha . u$ de E, que se chamará produto de α por u, e de tal modo que se verifiquem as condições seguintes:

I) $(\alpha + \beta)u = \alpha u + \beta u$ $\quad (\alpha \in A; \beta \in A ; u \in E)$

II) $\alpha(u+v) = \alpha u + \alpha v$ $\quad (\alpha \in A; u \in E ; v \in E)$

III) $\alpha(\beta u) = (\alpha\beta).u$ $\quad (\alpha, \beta \in A ; u \in E)$

IV) $1.u = u$ $\quad$ ($1 \in A$, elemento neutro da multiplicação de A)

Recordando as propriedades que encontrámos para as operações definidas em $C^{\omega}(I)$ e $C_{\omega}(I)$, podemos resumi-las dizendo que: $C^{\omega}(I)$ é um anel comutativo, com elemento um (que é a função constante, $f \equiv 1$), e $C_{\omega}(I)$ é um grupo comutativo a respeito da adição de distribuições que definimos. Tendo agora em vista as propriedades do produto, φT, de uma função indefinidamente derivável, φ, por uma distribuição de ordem finita, T, podemos resumir as propriedades indicadas na pág. 66, dizendo:

....

(1) Vd. nota da pág. seguinte.

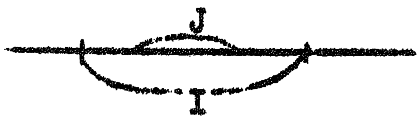
"O conjunto $C_\omega(I)$ das distribuições de ordem finita sôbre I é um módulo sôbre o anel $C^\omega(I)$ das funções indefinidamente deriváveis em I .

Em particular, êste anel $C^\omega(I)$ contém o corpo dos números complexos,-mais precisamente: êste corpo é isomorfo do corpo das funções que se reduzem a constantes, sôbre I, o qual é uma parte de $C^\omega(I)$, evidentemente.

Ora, quando se considera um módulo E sôbre um anel que é um corpo, K,-a nomenclatura muda: diz-se então que E é um espaço vectorial sôbre o corpo K. Os elementos de E passam a chamar-se vectores os de K escalares. Um exemplo simples de espaço vectorial é constituido pelos vectores do espaço ordinário a 3 dimensões: êsses vectores formam evidentemente um espaço vectorial sôbre o corpo R dos números reais.

Pois bem: de acôrdo com o que vimos, podemos em particular considerar $C_\omega(I)$ como um espaço vectorial sôbre o corpo complexo. Ou, como também se diz, um espaço vectorial complexo. E é principalmente a estrutura de espaço vectorial de $C_\omega(I)$ que nos irá interessar.

Antes de passar ás aplicações, observemos ainda o seguinte: definiu-se o produto $\varphi.T$, de uma função indefinidamente derivável por uma distribuição, num mesmo intervalo I. E como definir o produto $\varphi.T$, no caso de ser T uma distribuição de ordem infinita?



É fácil vêr que se pode ainda definir um tal produto, de modo muito naturalmente sugerido pela definição adoptada no caso das distribuições de ordem finita. Basta lembrar que T é determinada pela família das suas restrições aos intervalos compactos contidos no seu domínio I, e que essas restrições são distribuições de ordem finita no intervalo a que dizem respeito; isto é, se $T \in C_\pi(I)$, é $T = \{T_J\}$, com $J \subset I$ compacto, e $T_J \in C_\omega(I)$. Será pois natural tomar como definição de produto $\varphi.T$ neste caso: $\varphi.T = \{\varphi_J T_J\}$ - pg. 72, nota

Como T_J é de ordem finita, sabemos o que é $\varphi_J T_J$. Prova-se sem dificuldade que esta definição de produto $\varphi.T$ é aceitável, isto é, que $\{\varphi_J T_J\}$ é uma família compatível de distribuições associada ao intervalo I,-quer dizer, uma distribuição pertencente ao conjunto $C_\pi(I)$, e que esta é univocamente determinada. Verifica-se ainda que o produto $\varphi.T$ assim coerentemente definido, goze de tôdas as propriedades do produto, atraz estudado, de uma função indefinidamente deri-

....

(1) Segundo alguns autores, chama-se simplesmente módulo um grupo comutativo cuja operação fundamental tenha o nome de adição e seja notada pelo sinal + . (Esta nota refere-se à pág. anterior)

vável por uma distribuição de ordem finita;mais ainda:prova-se que é determinado pelas condições I) e II) formuladas na pág. 60 e pela condição de permutar com os operadores de restrição.

Como aplicação do que dissemos, vamos agora deduzir uma fórmula que muito interessa para o Cálculo Simbólico dos Electrotécnicos,no caso simples de circuitos eléctricos de constantes concentradas. É a fórmula que nos dá o produto de uma função indefinidamente derivável, φ,pela função δ de Dirac e pelas respectivas derivadas. Propomo-nos pois calcular os produtos $\varphi\delta, \varphi\delta', \ldots, \varphi\delta^{(n)}, \ldots$

Convém observar prèviamente um facto muito importante. Vimos que,quando a distribuição T é uma função contínua,o produto $\varphi.T$ coincide com oproduto usual. Ora,há distribuições que,não sendo funções contínuas,são no entanto <u>funções localmente somáveis</u>:tal é o caso da função de Heaviside,H(x). Levanta-se a questão seguinte:será o produto de φ por uma função localmente somável,definido segundo o critério precedente,ainda coincidente com o produto usual? Vamos vêr que sim. Sabe-se que tôda a função localmente somável se pode identificar com uma distribuição T que é a derivada de uma função f <u>absolutamente contínua</u>: $T = Df$. E uma função absolutamente contínua admite derivada no sentido usual,<u>quási em todos os pontos</u>.

Será então $\varphi.T = \varphi.Df = D(\varphi f) - \varphi' f$

Podemos derivar o produto φf no sentido usual "quási em todos os pontos",obtendo nessas condições $\varphi.T = \varphi.Df = \varphi' f + \varphi f' - \varphi' f = \varphi.f'$. Concluimos que $\varphi.T$ coincide com o produto usual das funções φ e $T=f'$

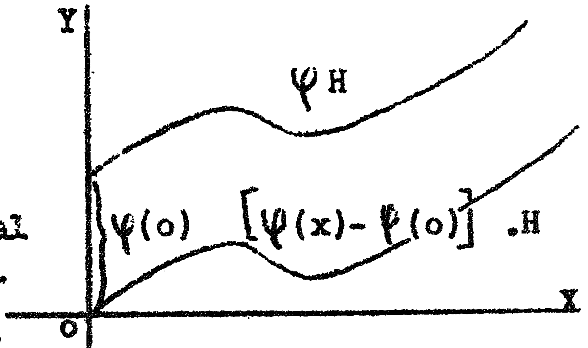
Pois bem: ao tentar calcular o produto $\varphi\delta$,observemos primeiro que tudo que a distribuição δ é a derivada da função localmente somável de Heaviside,H. Portanto, $\varphi\delta = \varphi.DH = D(\varphi H) - \varphi'.H$

Ora,evidentemente é válida a igualdade

$$\varphi H = \varphi(o)H + \left[\varphi(x) - \varphi(o)\right].H$$

Vejamos o significado deste artifício de cálculo. A passagem de φ para φH diz-se <u>mutilação ou truncatura</u> da função φ : na verdade,

$$\varphi H = \begin{cases} \varphi, \text{para } x>o \\ o, \text{para } x<o \end{cases}$$



É claro que o gráfico da função $\left[\varphi(x) - \varphi(o)\right].H$ para $x>o$ se obtém por uma translação vertical de amplitude $\varphi(o)$,a partir do gráfico da função φH.

Mas a função $\left[\varphi(x) - \varphi(o)\right].H$ é agora absolutamente contínua,pois que só carece de derivada quando muito no ponto <u>o</u> (conjunto de medida nula), sendo portanto derivável "quási em todos os pontos".

Tendo em vista as regras de derivação de distribuições, e o facto de $\varphi(o)$ sem uma constante, podemos escrever então

$$D(\varphi H) = \varphi(o)\delta + \varphi' H \qquad \text{Ou seja,} \qquad D(\varphi H) = \begin{cases} \varphi', \text{para } x>o; \\ o, \text{para } x<o \end{cases}$$

Quer dizer: o "salto" na origem que se observa na função φH reflecte-se, ao derivar, na introdução da função impulsiva $\varphi(o)\delta$ (se $\varphi(o)\neq o$).

Substituindo na precedente expressão de $\varphi\delta$,

$\varphi\delta = D(\varphi H) - \varphi' H$, a expressão agora obtida para $D(\varphi H)$, vem: $\varphi\delta = \varphi(o).\delta$

Isto é, "<u>o produto de uma função indefinidamente derivável $\varphi(x)$ por δ é igual ao produto de δ pelo valor que $\varphi(x)$ assume na origem</u>".

Calculemos agora $\varphi\delta'$. Temos

$$\varphi\delta' = D(\varphi\delta) - \varphi'\delta = D(\varphi(o)\delta) - \varphi'\delta = $$
$$= \varphi(o)\delta' - \varphi'(o)\delta,$$

uma vez que, sendo φ' uma função indefinidamente derivável, é certamente $\varphi'\delta = \varphi'(o)\delta$.

Quanto ao produto $\varphi\delta''$, temos

$$\varphi\delta'' = D(\varphi\delta') - \varphi'\delta' = D\left[\varphi(o)\delta' - \varphi'(o)\delta\right] - \left[\varphi'(o)\delta' - \varphi''(o)\delta\right] =$$
$$= \varphi(o)\delta'' - 2\varphi'(o)\delta' + \varphi''(o)\delta .$$

A semelhança deste somatório com o desenvolvimento do quadrado de um binómio sugere escrever no caso geral,

$$\varphi\delta^{(n)} = \sum_{k=o}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \varphi^{(k)}(o)\, \delta^{(n-k)}$$

Esta fórmula confirma-se, raciocinando por indução completa.

Trata-se de uma fórmula fundamental para as aplicações que iremos fazer do Cálculo Simbólico, no caso simples de circuitos eléctricos de constantes concentradas.

<u>**Nota**</u>: Quando, na página 70, se introduziu o símbolo φ_J, pretende-se designar, como é óbvio, a restrição da função φ ao intervalo J .