INTRODUÇÃO À TEORIA DAS DISTRIBUIÇÕES

SEGUNDO AS LIÇÕES DO PROF. **J. SEBASTIÃO E SILVA,** PROFERIDAS NO CENTRO DE ESTUDOS MATEMÁTICOS DO PORTO, EM 1956-57, E COMPILADAS POR ANTÓNIO ANDRADE GUIMARÃES.

PUBLICAÇÃO SUBSIDIADA PELO INSTITUTO DE ALTA CULTURA

MULTIPLICAÇÃO DE DISTRIBUIÇÕES (conclusão)

CÁLCULO SIMBÓLICO DE HEAVISIDE (preliminares)

6ª lição

Convém acrescentar alguns complementos à teoria, exposta na última lição, da multiplicação de uma função indefinidamente derivável por uma distribuição de ordem finita.

Vimos que o produto de uma função $\varphi \in C^{\infty}(I)$ por uma distribuição $T = D^n f$, com $f \in C(I)$, é dado pela fórmula

$$\varphi D^n f = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} D^{n-k}(\varphi^{(k)} f)$$

Mas se repararmos na expressão do 2º membro, verificamos que este continua a ter sentido, mesmo que φ não seja <u>indefinidamente derivável</u>: basta que essa função possua derivada <u>contínua</u> até à ordem n.

Fàcilmente se reconhece que, mediante aquela mesma fórmula, se define uma aplicação

$$(\varphi, T) \longrightarrow \varphi.T$$

do produto cartesiano $C^n(I) \times C_n(I)$ no conjunto $C_n(I)$, -aplicação essa que coincide com a multiplicação usual quando T fôr uma função contínua, e que, além disso, verifica a regra da derivação do produto, (quando T fôr de ordem inferior a n):

$$D(\varphi.T) = D\varphi.T + \varphi.DT$$

Aquela aplicação pode pois chamar-se <u>produto da função</u> $\varphi \in C^n(I)$ <u>pela distribuição</u> $T \in C_n(I)$.

O que acaba de se dizer é válido qualquer que seja <u>n</u>, e assim temos efectuada uma pequena extensão do produto $\varphi.T$ considerado na lição precedente.

Podemos mesmo ir mais longe, introduzindo a noção de produto de uma função por uma medida. Para definir convenientemente este novo produto, de uma função (contínua) f por uma medida μ (definidas ambas, f e μ, num mesmo intervalo I), consideremos o integral

$$\Phi(x) = \int_c^x f(t) \mu_t dt \quad ,$$

onde <u>c</u> designa um ponto qualquer de I .

É fácil reconhecer que esta função é de variação limitada em cada intervalo compacto (contido em I) e, por conseguinte, é primitiva de uma medida; por outras palavras, admite como derivada ainda uma medida, à qual, por definição, se chamará "produto" da função contínua f pela medida μ. Em fórmula:

$$f\mu = D\Phi$$

Se agora fôr dada uma função continuamente derivável φ, e uma medida μ, podemos definir o produto de φ pela derivada de μ, mediante a igualdade

$$\varphi . D\mu = D(\varphi\mu) - \varphi'\mu \quad .$$

Na verdade, tudo que figura no 2º membro tem já um sentido preciso.

E mais geralmente, podemos definir produto de uma função φ, continuamente derivável até à ordem n, pela derivada de ordem n da medida μ

$$\varphi . D^n\mu$$

Esta é uma generalização sensível da noção de produto φ.T, definido na lição precedente apenas quando

$$\varphi \in C^{\omega}(I) \quad , \quad T \in C_{\omega}(I) \quad .$$

Segundo este critério, podíamos justificar a fórmula

$$\varphi\delta = \varphi(o)\delta$$

ou, mais geralmente, a fórmula

$$\varphi\delta^{(n)} = \sum_{k=o}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \varphi^{(k)}(o)\, \delta^{(n-k)} \quad , n=o,1,2,\ldots .$$

mesmo na hipótese em que φ é n vezes contìnuamente derivável (contínua, portanto, se n=o), sem ser necessário supor φ indefinidamente derivável.

No entanto, quando se procurou generalizar aquela multiplicação para além do limite a que chegámos, surgem graves e até insuperáveis dificuldades.

Numa Nota publicada nas Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, em Outubro de 1954, L. Schwartz apresenta, àcerca do problema da multiplicação de distribuições, um resultado negativo muito interessante, que vamos referir na essência.

Começa por dizer que os físicos necessitam por vezes dar sentido a produtos tais como

$$\delta\delta, \quad \delta\delta', \quad \delta'\delta', \ldots .$$

Ora, diz Schwartz, isso não é possível, sem renunciar a algumas propriedades da multiplicação habitual de funções. Concretamente, -é necessário renunciar à <u>associatividade</u>, desde que se queira manter a regra de derivação do produto, e a coincidência dêste com o produto usual no espaço das funções contínuas. A prova desta asserção fá-la Schwartz analisando um exemplo bastante simples.

Consideremos a função indefinidamente derivável x; no campo das funções admite uma <u>inversa</u> que é $\frac{1}{x}$ na verdade, o produto de x por $\frac{1}{x}$ é 1, em quási todos os pontos. Mas (segundo vimos já) $\frac{1}{x}$ não é uma distribuição; corresponde a infinitas distribuições, uma das quais é a que chamamos <u>parte finita</u> de $\frac{1}{x}$: é a derivada formal de $\log|x|$

$$\mathrm{Pf}\frac{1}{x} = D \log|x|$$

Mas vamos ver que se tem ainda

$$x.\mathrm{Pf}\frac{1}{x} = 1 ,$$

se quisermos que se mantenha a regra de derivação do produto, e que no caso das funções contínuas a noção de produto coincida com a usual.

Efectivamente, substituindo $\mathrm{Pf}\frac{1}{x}$ pelo seu valor, fica:

$x.D \log|x| = D(x \log|x|) - \log|x|$; para calcular esta diferença de distribuições, convém escrever a segunda sob a forma de derivada (da sua primitiva, que se pode calcular por partes) ; virá então

$$x.D \log|x| = D(x \log|x|) - D(x \log|x| - x) = Dx = 1$$

Mais geralmente, é fácil ver que

$$x(\mathrm{Pf}\frac{1}{x} + c\delta) = 1 \text{ , porque}$$

$$x.\mathrm{Pf}\frac{1}{x} = 1 \text{ (conforme vimos hà pouco);}$$

e $x.c\delta = c.[x]_{x=0}\delta = 0$, tendo em vista a regra de cálculo do produto $\varphi.\delta$, de uma função indefinidamente derivável φ pela distribuição δ. (Final da última lição)

(Assim ficou de passagem demonstrado que a distribuição x admite <u>infinitas inversas</u>: isto mostra que a divisão em $C_{\pi}(I)$, quando é <u>possível</u>, não é <u>uniforme</u>. O problema da divisão de uma distribuição por uma função indefinidamente derivável é de grande importância, porque mediante a aplicação da transformação de Fourier a resolução de uma equação em derivadas parciais converte-se muitas vezes no problema da divisão por uma função indefinidamente derivável).

Para mostrar a impossibilidade de conciliação da associatividade do "produto" de duas distribuições arbitrárias com a permanência da regra da derivada do produto, basta observar que, a ter lugar a associatividade, deveria ter-se a igualdade seguinte:

$$\left(\mathrm{Pf}\frac{1}{x}.x\right)\delta = \mathrm{Pf}\frac{1}{x}(x.\delta)$$

Ora, o 1ª membro vale $1.\delta = \delta$; no 2ª membro, como se sabe, o factor $x.\delta$ vale $\left[x\right]_{x=0}\delta = 0.\delta = 0$.

A igualdade anterior não pode pois verificar-se, visto ser equivalente a $\delta = 0$, o que é falso.

Está pois provado que não podemos definir o produto de duas distribuições arbitrárias de maneira que êsse produto coincida com o produto usual no caso de funções contínuas, permaneça válida a regra de derivação do produto, e seja associativa uma tal multiplicação.

Mas, restaria ainda saber se é possível definir um produto de distribuições que <u>não</u> seja associativo, mas verifique as restantes condições. A resposta, pelo menos em parte, já tinha sido dada por Heinz König numa comunicação ao Congresso Internacional de Matemática, reúnido em Amsterdam, em Setembro de 1954, e publicada depois desenvolvidamente em 1955. Multiplikation von Distributionen, I), Math. Annalen, Bd. 128, p. 420-452

Vamos apresentar uma idéa muito sucinta deste importante trabalho de H. König. Começa por provar que, ampliando o conjunto das distribuíções, $C_{\pi}(I)$, com a adjunção de novos entes <u>abstractos</u>, é possível definir o produto S.T de duas distribuições arbitrárias, de modo que êste produto coincida com oproduto usual no conjunto das funções contínuas, e seja mantida a regra de derivação do produto. Simplesmente, a multiplicação assim definida não é <u>associativa</u>, -como aliás o impõe o exemplo apresentado por Schwartz.

Mas, o resultado mais desconcertante de König é êste: é possível efectuar aquela ampliação de infinitas maneiras diversas, sem que as ampliações correspondentes sejam isomorfas: há, assim infinitas teorias da multiplicação de distribuições, não equivalentes entre si, e sem que seja possível caracterizar uma ampliação que, por assim dizer, seja <u>mínima</u> .

Não se sabe mesmo se é possível fazer com que <u>não haja ampliação efectiva</u>: a multiplicação de distribuições (no sentido de König) não exigiria então que se saísse do campo das distribuições. É um problema em aberto. No estado actual da teoria de König, o produto de duas distribuições é pois um ente que já não é uma distribuição, em geral; -em casos particulares pode todavia sê-lo.(1)

Dada a possibilidade já assinalada, da definição de várias teorias não-equivalentes da multiplicação, pode acontecer que dadas duas derivadas de δ, $\delta^{(m)}$ e $\delta^{(n)}$, -o respectivo produto $\delta^{(m)} . \delta^{(n)}$ tenha um certo "valor" segundo uma daquelas teorias, e um "valor" diferente, segundo outra teoria.

Como, do ponto de vista matemático, não há razões para preferir esta ou aquela teoria da multiplicação, -é certamente de acôrdo com as necessidades da Física teórica que a escôlha de uma teoria da multiplicação de distribuições deve ser feita.

....

(1) Note-se que já o produto de duas funções localmente somáveis, no sentido usual, pode não ser uma distribuição. Por exemplo, a função $1/\sqrt{x}$ é localmente somável no intervalo $[0,+\infty[$ e tem-se $1/\sqrt{x} . 1/\sqrt{x} = 1/x$, função esta que já não é uma distribuição naquele mesmo intervalo, como se viu na 4ª lição.

CÁLCULO SIMBÓLICO
OU
CÁLCULO OPERACIONAL

Será conveniente começar por dar uma idea da maneira como o Eng.º Heaviside aplicava à integração de equações diferenciais o método simbólico, sem justificação, isto é, de modo apenas heurístico.

Consideremos, por exemplo, uma equação diferencial linear de 2ª ordem de coeficientes constantes,

$$a\varphi''+b\varphi'+c\varphi = f \quad .$$

Nesta equação, supõe-se f uma função conhecida, e φ a função incógnita. Pretende-se resolver uma tal equação, de modo que se verifiquem as condições iniciais:

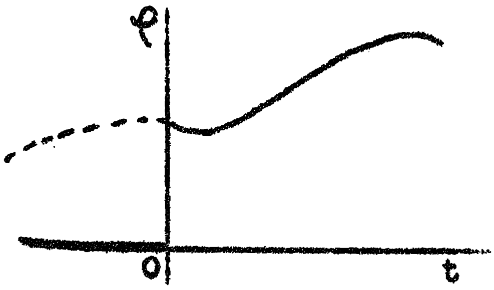
$$\varphi(o) = c_o$$
$$\varphi(o) = c_1$$

Designemos por D o operador da derivação; aquela equação pode tomar então o seguinte aspecto:

$$aD^2\varphi+bD\varphi+c\varphi = f$$

Para concretizar ainda melhor, suponhamos que aquela equação descreve a evolução de um sistema físico,- por exemplo, de um circuito eléctrico, significando então φ (t) a quantidade de electricidade que se escoa num condutor entre o instante t=o e o instante t.

Neste caso, o que interessa é o futuro, isto é, o que acontece para t>o. Bastará então determinar, em vez de φ, a função φ H, que é a primeira amputada para a esquerda da origem:



$$\varphi H = \begin{cases} \varphi, \text{para } t>o \\ o, \text{para } t<o \end{cases}$$

Daí a idea de multiplicar os dois membros da equação diferencial por H:

$$aD^2\varphi.H+bD\varphi.H+c\varphi.H = fH \qquad (1)$$

Notemos agora as seguintes consequências da regra de

derivação do produto e da regra de cálculo do produto $\varphi.\delta$
,onde φ é uma função indefinidamente derivável:

$$\begin{cases} D(\varphi H) = D\varphi.H + \varphi.DH = D\varphi.H + \varphi.\delta = \\ \quad = D\varphi.H + \varphi(o)\delta = D\varphi.H + c_o\delta \\ D^2(\varphi H) = D^2\varphi.H + \varphi'\delta + c_o\delta' = D^2\varphi.H + c_1\delta + c_o\delta', \\ \quad (\text{uma vez que } \varphi'(o) = c_1) \end{cases}$$

Pois bem: substituindo, na equação diferencial dada, $D\varphi.H$ e $D^2\varphi.H$ pelas expressões, obtidas no sistema anterior, e passando para o 2ª membro daquela equação diferencial os termos em δ e δ', fica:

$$aD^2(\varphi.H) + b.D(\varphi H) + c(\varphi.H) = $$
$$= fH + (ac_1 + bc_o)\delta + ac_o\delta'$$

E se abreviadamente representarmos o 2ª membro desta igualdade por $\bar{f}$, a equação dada assume por fim o aspecto

$$aD^2(\varphi H) + b.D(\varphi H) + c(\varphi H) = \bar{f} \qquad (2)$$

Esta idea de amputar a função φ foi deveras interessante: permitiu fazer entrar no 2ª membro, $\bar{f}$, os próprios <u>dados iniciais</u> do problema. Aliás, $\bar{f}$ não é já, em geral, uma função, mas sim uma distribuição.

Além desta idea, houve outra que causou certo escândalo, mas que não deixou de ser também deveras feliz nas suas consequências: consistiu em tratar o símbolo D de derivação como se fôsse um <u>símbolo numérico</u>, sujeito às mesmas regras de cálculo aplicáveis aos números. Procuraremos mais tarde justificar essa maneira de proceder. Vamos limitar-nos, por agora, a seguir o método heurístico, e ver onde nos conduz, no estudo do exemplo mui simples que estamos analisando.

Suponhamos então que se podem aplicar ao símbolo D as regras de cálculo válidas para os números. A equação (2) pode pois tomar a forma:

$$(aD^2 + bD + c)(\varphi H) = \bar{f}, \text{ donde}$$

$$\varphi H = \frac{1}{aD^2 + bD + c}\bar{f} \qquad (2')$$

Como interpretar esta função racional do operador D ? Consideremos a equação $ax^2+bx+c=o$, que é (como se sabe) a chamada <u>equação característica</u> da equação diferencial dada.

Suponhamos que $\alpha \neq \beta$ são as raízes dessa equação. Sabe-se que é então possível determinar dois números, μ e ν, tais que

$$\frac{1}{ax^2+bx+c} = \frac{\mu}{x-\alpha} + \frac{\nu}{x-\beta} \qquad (3)$$

Esses números podem calcular-se pelo método dos coeficientes indeterminados, sendo

$$\mu + \nu = 0$$
$$\beta\mu + \alpha\nu = -\frac{1}{a}$$

Substituindo x por D em ambos os membros de (3), e atendendo ao resultado obtido, (2') assume o aspecto

$$\varphi H = \frac{\mu}{D-\alpha}\bar{f} + \frac{\nu}{D-\beta}\bar{f} \qquad (2'')$$

Poderíamos fazer ainda

$$\frac{\mu}{D-\alpha}\bar{f} = \varphi_1$$
$$\frac{\nu}{D-\beta}\bar{f} = \varphi_2 \qquad (4)$$

Virá então

$$\varphi H = \varphi_1 + \varphi_2 \qquad (2''')$$

Resta interpretar $\frac{\mu}{D-\alpha}\bar{f}$ e $\frac{\nu}{D-\beta}\bar{f}$.

Neste ponto, Heaviside não hesitava em desenvolver aquelas funções em séries de potencias de D. Não precisaremos porém, neste caso simples, de recorrer a tal processo, -bastar-nos-à aplicar o que se conhece já da teoria clássica das equações diferenciais. Na verdade, as equações (4) podem escrever-se com a forma

$$D\varphi_1 - \alpha\varphi_1 = \mu\bar{f}$$
$$D\varphi_2 - \beta\varphi_2 = \nu\bar{f}$$

Trata-se de um sistema de duas equações diferenciais lineares de 1ª ordem; aplicando as conhecidas fórmulas resolventes (com constante arbitrária nula), obtemos:

$$\varphi_1(t) = \mu e^{\alpha t}\int_0^t e^{-\alpha u}.\bar{f}(u)\,du$$

$$\varphi_2(t) = \nu e^{\beta t}\int_0^t e^{-\beta t}.\bar{f}(u)\,du$$

Falta agora calcular estes integrais.

Não esqueçamos que $\bar{f}$ é dado pela soma

$$fH + (ac_1+bc_0)\delta + ac_0\delta',$$

na qual só o 1º termo é uma função, e os restantes são distribuições.

Temos, por exemplo, de calcular $e^{-\alpha u}.\delta$

Ora, segundo regra deduzida na lição anterior, temos:

$$e^{-\alpha u}.\delta = e^0.\delta = \delta \ .$$

Anàlogamente,

$$e^{-\alpha u}.\delta' = e^0.\delta' - \frac{d}{du}(e^{-\alpha u})_0.\delta = \delta' + \alpha\delta$$

Depois, ao integrar, será natural fazer

$$\int_0^t \delta.du = H \quad ; \quad \int_0^t \delta'.du = \delta \ .$$

Tendo em conta todos êstes factos, obtemos para $\varphi_1(t)$ e $\varphi_2(t)$ as expressões seguintes:

$$\varphi_1(t) = \mu e^{\alpha t}\left[\int_0^t e^{-\alpha u}.f(u)du + ac_1 + bc_0 + \alpha ac_0 + ac_0\delta\right]$$

$$\varphi_2(t) = \nu e^{\beta t}\left[\int_0^t e^{-\beta u}.f(u)du + ac_1 + bc_0 + \beta ac_0 + ac_0\delta\right]$$

Estas expressões deduzem-se para $t>0$: por isso mesmo, no integral $\int_0^t e^{-\alpha u}.f(u).H(u)\,du$, já suprimimos o factor H, escrevendo simplesmente

$\int_0^t e^{-\alpha u}.f(u)du$; e o mesmo nos termos que não contêm δ

Portanto, para todos os valores de $t>0$, temos calculada a "incógnita" φH, tendo em vista que $\varphi H = \varphi_1 + \varphi_2$.

Pode estranhar-se a presença, nas expressões de φ_1 e φ_2, da distribuição δ, que não estamos habituados a encontrar nos integrais das equações diferenciais lineares de 2ª ordem de coeficientes constantes. Essa anomalia é apenas aparente ao calcular $\varphi_1 + \varphi_2$, aparece a soma $(\mu + \nu)ac_o\delta$, que é <u>nula</u> visto ser $\mu + \nu = o$, como se acentuou oportunamente.

(A aparente complicação, decorrente da introdução de δ em φ_1 e φ_2, apresenta certa semelhança com o que se passa em certos cálculos onde intervém a unidade imaginária <u>i</u>, que aliás desaparece no fim dêsses cálculos. Sucede isso por exemplo com a resolução algébrica da equação do 3º gráu no chamado <u>caso irredutível</u> precisamente neste caso, em que todas as raízes da equação são reais, os dois radicais cúbicos que figuram na fórmula resolvente conduzem a três pares de números <u>imaginários</u> conjugados, cujas somas são números reais, raízes da equação; assim, a unidade imaginária intervém como feliz expediente de cálculo, desaparecendo depois, sem deixar vestígio).

Um facto decisivo a assinalar ainda é este: a função φ, definida pela soma das expressões encontradas para φ_1 e φ_2, verifica efectivamente a equação diferencial proposta, não só para $t>o$ como para $t\leq o$, e satisfaz também às condições iniciais. É mesmo <u>a única</u> função que cumpre tôdas essas imposições.

Quer dizer: o método, indubitàvelmente, "dá resultado". Mas seria insustentável permanecer indefinidamente, como Heaviside e alguns seus sucessores, no campo heurístico: hà que racionalizar, sistematizar coerentemente o método tão felizmente encontrado. Quanto às vantagens que êste método símbólico apresenta, são ainda pouco evidentes: manifestamente, poderíamos ter chegado ao mesmo resultado sem recorrer às distribuições δ e δ'

Observe-se no entanto, desde já o seguinte:

1ª) o método é deveras cómodo e elegante;

2ª) devemos ter em conta que, quando em vez de uma só equação, se tiver de integrar um sistema de equações diferenciais (como, por exemplo, as que traduzem em geral, o regime de um circuito eléctrico), é então inevitável, muitas vezes, o uso da distribuição δ e suas derivadas.

Justifiquemos agora a maneira de proceder de Heaviside, quanto ao operador D. Essa maneira de proceder é um caso particular de uma técnica muito geral, a que se dá o nome de <u>cálculo dos operadores lineares</u>. ou <u>cálculo operacional</u>, ou <u>cálculo simbólico</u>; em cuja base se encontra o conceito de <u>espaço vectorial</u>.

Dissemos já (pág.70) o que se entende por espaço vectorial sôbre um corpo K. O primeiro exemplo que naturalmente se apresenta é do conjunto dos vectores do espaço tridimensional, que constitui um espaço vectorial sôbre o corpo R dos números reais.

Um exemplo menos trivial é a potência cartesiana, R^n, do corpo dos números reais.

Considerando dois elementos arbitrários de R^n

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$y = (y_1, y_2, \dots, y_n),$$

define-se <u>soma de</u> x <u>com</u> y mediante a igualdade

$$x+y = (x_1+y_1, x_2+y_2, \dots, x_n+y_n).$$

É fácil reconhecer que, a respeito da adição assim definida, R^n é um <u>grupo comutativo</u>. Por outro lado, podemos definir a "multiplicação" de um vector $x \in R^n$ por um "escalar" $\alpha \in R$, mediante a igualdade

$$\alpha x = (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n),$$

e verifica-se então sem dificuldade que R^n é um <u>espaço vectorial</u> sôbre o corpo R dos números reais. Anàlogamente se reconhece que a potencia cartesiana de expoente n do corpo C dos números complexos, C^n, é um espaço vectorial sôbre o corpo dos números complexos.

Por comodidade de linguagem, também se chama a um espaço vectorial sôbre o corpo dos números reais, <u>espaço vectorial real</u>; a um espaço vectorial sôbre o corpo dos números complexos, <u>espaço vetorial complexo.</u>

Tínhamos visto já que o espaço $C_\eta(I)$ das distribuições sôbre I é um espaço vetorial complexo, -o mesmo acontecendo com o espaço $C_\omega(I)$ das distribuições de ordem finita sôbre I. Quando tal acontece, -quer dizer: quando um sub-conjunto E' de um espaço vetorial E sôbre um corpo K é por sua vez, a respeito das operações de E restringidas a E', um espaço vectorial sôbre K, diremos que E' é um <u>sub-espaço vectorial</u> de E

$C_\omega(I)$ é pois um sub-espaço vectorial do espaço vectorial complèxo $C_\eta(I)$. Anàlogamente, C(I) é um sub-espaço vettorial do espaço vectorial complexo $C_\eta(I)$. De um modo geral na sucessão de inclusões

$$C_\eta(I) \supset C_\omega(I) \supset C(I) \supset C^n(I) \supset C^{\omega}(I)$$

cada conjunto é sub-espaço vetorial do espaço vectorial complexo) precedente.

. . . .

Um outro conceito essencial para o que segue, é o de aplicação linear de um espaço vectorial E num espaço vectorial F, ambos definidos sôbre um mesmo corpo K.

Diz-se que uma aplicação Φ de E em F é uma aplicação linear quando se verificarem as condições seguintes:

$$\Phi(u+v) = \Phi(u)+\Phi(v) \qquad \text{(aditividade)}$$
$$\Phi(\alpha\, u) = \alpha.\Phi(u) \qquad \text{(homogeneidade)},$$

para quaisquer vectores $\underline{u}$ e $\underline{v}$ de E, e qualquer escalar $\alpha \in K$.

Por exemplo, - uma aplicação linear de R^3 em R^2

$$(x_1,x_2,x_3) \longrightarrow (\cdot_1,y_2)$$

é definida pelo sistema de equações

$$y_1 = ax_1+bx_2+cx_3$$

$$y_2 = dx_1+ex_2+fx_3 \ ,$$

onde a,b,c,d,e,f designam constantes reais.

Prova-se mesmo que, inversamente, - tôda a aplicação linear de R^3 em R^2 é necessàriamente definida por um sistema de equações daquela forma, sistema êsse que é caracterizado completamente pela matriz

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}$$

As aplicações lineares que mais nos interessa agora considerar são as representadas pelo símbolo D de derivação. Por exemplo, D representa uma aplicação linear do espaço $C^1(I)$ no espaço $C(I)$, visto que se tem

$$D(f+g) = Df+Dg$$
$$D(\alpha\, f) = \alpha\, .Df \ ,$$

para quaisquer funções continuamente deriváveis f e g, e qualquer número complexo α .

Também o símbolo $\mathcal{J}$ de integração já considerado,

$$\mathcal{J} f = \int_c^x f(t)\, dt$$

representa uma aplicação linear do espaço C(I) em si mesmo.

É claro que D ainda representa uma aplicação linear do espaço $C_{\omega}(I)$ em si mesmo, do espaço $C_{\vartheta}(I)$ em si mesmo, etc.; mas já o operador $\mathcal{J}$ não é definido nestes espaços de distribuições.

Dadas duas aplicações, Φ e ψ, de um espaço vectorial E num espaço vectorial F (definidas ambas sôbre o mesmo corpo), chama-se soma $\Phi+\psi$ das aplicações Φ e ψ à aplicação (também linear) definida da maneira seguinte:

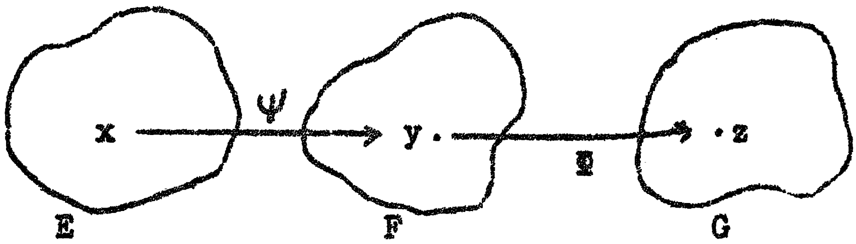
$$(\Phi+\psi)u = \Phi u+\psi u \qquad (\underline{u}\text{, qualquer vector de } E)$$

Assim adquire sentido, por exemplo, uma expressão como $D+\mathcal{J}$ representa o operador assim definido em $C^1(I)$

$$(D+\mathcal{J})f = Df+\mathcal{J}f \,.$$

Além do conceito de adição, define-se produto de duas aplicações lineares, tal como se define produto de duas aplicações quaisquer.

Sejam E, F, G três espaços vectorias sôbre um mesmo corpo K.



Seja ψ uma aplicação linear de E em F, e Φ outra aplicação, linear de F em G. Define-se então produto $\Phi\psi$ mediante a igualdade:

$$(\Phi\psi)u = \Phi(\psi u)$$

sendo fácil ver que $\Phi\psi$ ainda é linear.

É claro que o produto assim definido não é em geral comutativo. Basta observar por exemplo que

$$D\mathcal{J} \neq \mathcal{J}D$$

Consideremos agora, em especial, a classe das aplicações lineares de um espaço vectorial, E, em si mesmo. Designemos por $\Lambda(E)$ essa classe. Neste conjunto $\Lambda(E)$ temos já definidas uma adição e uma multiplicação, que, como é fácil reconhecer, gosam das seguintes propriedades:

1) A adição é sempre possível, unívoca, associativa, reversível e comutativa (grupo comutativo).
2) A multiplicação é sempre possível, unívoca e associativa (semi-grupo, geralmente não comutativo).
3) A multiplicação é distributiva a respeito da adição, à direita e à esquerda, isto é, tem-se:

$$\Phi(\psi+\chi) = \Phi\psi+\Phi\chi, \quad (\Phi+\psi)\chi = \Phi\chi+\psi\chi,$$

quaisquer que sejam $\Phi, \psi, \chi \in (E)$.

Ora, como vimos na lição anterior, estas propriedades exprimem-se abreviadamente, dizendo que $\Lambda(E)$ <u>é um anel</u> (relativamente à adição e à multiplicação ali definidas)

Como além disso existe em $\Lambda(E)$ um <u>elemento unidade</u>, isto é, um elemento neutro da multiplicação à direita e à esquerda (o operador idêntico I, pois que se tem sempre $\Phi I = I \Phi = \Phi$), diz-se mais precisamente que $\Lambda(E)$ <u>é um anel com elementos unidade</u>.