INTRODUÇÃO À TEORIA DAS DISTRIBUIÇÕES

SEGUNDO AS LIÇÕES DO PROF. **J. SEBASTIÃO E SILVA,** PROFERIDAS NO CENTRO DE ESTUDOS MATEMÁTICOS DO PORTO, EM 1956-57, E COMPILADAS POR ANTÓNIO ANDRADE GUIMARÃES.

PUBLICAÇÃO SUBSIDIADA PELO INSTITUTO DE ALTA CULTURA

CÁLCULO SIMBÓLICO

(continuação)

7ª lição

No final da última lição, tínhamos verificado que a classe $\Lambda(E)$ das aplicações lineares de um espaço vectorial E em si mesmo é um anel com elemento um.

Mas podemos definir sôbre êste anel mais uma operação: a de produto, $\alpha\,\Phi$, de um escalar qualquer $\alpha \in K$ por um operador qualquer $\Phi \in \Lambda(E)$. A sua definição pode ser dada da maneira seguinte:

$$(\alpha\,\Phi).(u) = \alpha(\Phi(u)) \ ,$$

designando u um vector qualquer de E.

Ora observa-se que, a respeito da adição já definida em $\Lambda(E)$ e da multiplicação agora definida, de um elemento dêste conjunto por um escalar, $\Lambda(E)$ é um espaço vectorial sôbre o corpo K. E mais ainda: é válida a propriedade seguinte: "dados dois escalares α e β, tem-se

$$(\alpha\,\Phi)(\beta\,\Psi) = (\alpha\beta)(\Phi\Psi) \ ."$$

Esta propriedade pode ser reconhecida muito fàcilmente, tendo em conta o facto de as aplicações lineares permutarem com os escalares.

De um modo geral, diz-se que um anel A é uma álgebra sôbre um corpo K, se o conjunto A, além da estrutura de anel, possue também a estrutura de espaço vectorial sôbre K (a respeito da mesma adição a que se refere a estrutura de anel de A), e se é válida ainda esta outra propridade:

$$(\alpha x)(\beta y) = (\alpha\beta)(xy) \ ,$$

para quaisquer $x, y \in A$ e quaisquer escalares $\alpha, \beta \in K$.

(Em vez de "álgebra sôbre um corpo", também se diz "sistema hiper-complexo sôbre um corpo")

Podemos pois dizer que a classe das aplicações lineares de um espaço vectorial E em si mesmo é uma álgebra sôbre o corpo dos escalares de E . Mas é uma álgebra em que se verifica mais esta propriedade: "existe um elemento unidade, isto é, um elemento neutro da multiplicação definida no anel $\Lambda(E)$".

Esse elemento operador idêntico, I; tem-se com efeito:

$$\Phi.I = I.\Phi = \Phi \ . \text{ (Vd.Nota pág.87)}$$

No que segue, importa dar sentido ao símbolo Φ^n, potência de expoente inteiro não-negativo de um operador Φ. É o que se consegue muito fàcilmente a partir da multiplicação definida no anel $\Lambda(E)$, mediante o seguinte esquema de recorrência:

$$\Phi^0 = I$$

$$\Phi^{n+1} = \Phi^n . \Phi \qquad (n=1,2,3.....)$$

Imediatamente se reconhece que $\Phi^m . \Phi^n = \Phi^{m+n}$, bem como outras propriedades da potência que não exijam comutatividade.

Aliás, repare-se desde já em que duas potências do mesmo operador são sempre comutáveis entre si .

(Definidas por anàlogo esquema de indução, já anteriormente tínhamos trabalhado com as potências D^n e $\mathfrak{J}^n$ dos operadores de derivação e integração, D e $\mathfrak{J}$).

Pois bem, as operações definidas na álgebra Λ(E) permitem atribuir um sentido preciso a um polinómio em Φ, isto é, a uma expressão do tipo

$$a_0\Phi^n + a_1\Phi^{n-1} + ... + a_{n-1}\Phi + a_n\Phi^0 ,$$

onde os $a_i \in K$ são escalares, e n é um número inteiro não-negativo.

Uma tal expressão define, manifestamente, um determinado operador, ψ, pertencente ainda a Λ(E). Este operador, ψ, diz-se função racional inteira do operador Φ.

Para maior simplicidade de notação, podemos identificar a_n com o operador $a_n\Phi^0$, atendendo a que Φ^0 é o operador idêntico, isto é, podemos escrever

$$a_n = a_n . \Phi^0 .$$

Corresponde isto a identificar todo o escalar α com o operador da forma α I . De acôrdo com esta convenção, podemos passar a representar o operador idêntico pelo próprio algarismo 1. Em tudo o que segue, ao falarmos de "polinómio num operador Φ" subentendemos que se trata dum polinómio em Φ de coeficientes escalares, isto é, duma expressão do tipo atrás indicado. [É claro que se podem ainda considerar polinómios em Φ cujos coeficientes são operadores quaisquer, elementos de Λ(E)].

....

Nota referente à página anterior

Tudo o que vamos dizer sobre funções dum operador $\Phi \in \Lambda$(E) aplica-se, mutatis mutandis, a funções dum elemento duma álgebra qualquer com elemento unidade. (Um primeiro exemplo não trivial de álgebra que, historicamente, se apresentou para além do corpo complexo, foi a álgebra dos quaterniões de Hamilton).

Das propriedades com que axiomàticamente caracterizamos uma álgebra,podemos deduzir propriedades dos polinómios em Φ,que são idênticas a propriedades dos polinómios usuais numa variável. Podemos,em particular,adicionar e multiplicar polinómios num mesmo operador,como se faz habitualmente. (Tratando-se de polinómios em dois operadores diferentes,Φ e Ψ, não necessàriamente comutáveis,é claro que desta não-comutabilidade decorrem diferenças operatórias sensíveis em relação à regra habitual de multiplicação de polinómios,por ex.).

Suponhamos,por exemplo,que se trata de "multiplicar" os polinómios $a\Phi^2+b\Phi+c$ e $m\Phi+n$.

Aplicando as propriedades de distributividade válidas na álgebra Λ (E),temos imediatamente:

$$(a\Phi^2+b\Phi+c)(m\Phi+n) = (a\Phi^2)(m\Phi)+(a\Phi^2).n+(b\Phi)(m\Phi)+(b\Phi).n+c(m\Phi)+cn$$

Podemos alterar ainda o aspecto dos cinco primeiros termos deste somatório,tendo em vista os axiomas de uma álgebra; por exemplo,

$(a\Phi^2)(m\Phi) = (am)\Phi^3$,pela última propriedade assinalada na axiomática de sistema hiper-complexo (pág.86);pela mesma razão se tem $c(m\Phi) = (cm)\Phi$,visto que identificámos o escalar c ao operador cI. Efectuando todas essas simplificações,chegamos à expressão seguinte para o produto dos dois polinómios em Φ:

$$(a\Phi^2+b\Phi+c)(m\Phi+n) = am\Phi^3+an\Phi^2+bm\Phi^2+bn\Phi+cm\Phi+cn =$$
$$= am\Phi^3+(an+bm)\Phi^2+(bn+cm)\Phi+cn \ .$$

(Esta redução final dos termos semelhantes é lícita, de acôrdo com a distributividade válida na estrutura de espaço vectorial de Λ(E)) E assim se chega,em qualquer caso,ao produto,usualmente calculado,de dois polinómios numa variável,-que, neste caso toma o valor Φ.

Como se reconhece pelo resultado,duas funções racionais inteiras de um mesmo operador linear são sempre comutáveis

Quanto à adição de dois polinómios num mesmo operador linear,tudo decorre também da maneira usual.

Ficam assim legitimados o emprêgo e as regras de cálculo com funções racionais inteiras de operadores lineares,que apliquem um espaço vectorial E em si mesmo.

Passam,em particular,a ter sentido preciso símbolos como D^2-4 ou D^2+1,designando D o operador de derivação.

O primeiro, por exemplo, é um operador cuja incidência sôbre uma função (duas vezes derivável) f é traduzida pela igualdade seguinte:

$$(D^2-4)f = D^2f-4f \ .$$

E tem significado preciso também igualdades como:

$$D^2-4 = (D+2)(D-2)$$

$$D^2+1 = (D+i)(D-i)$$

Como interpretar, agora, a inversa de uma função racional inteira de um operador linear,

$$\frac{1}{a_o\Phi^n+a_1\Phi^{n-1}+\ldots+a_n} \quad ?$$

É necessário, antes de mais, definir com precisão o que se entende por inverso de um operador $\Phi\in\Lambda(E)$

Dado um operador Φ, diz-se que um operador ψ é um inverso (daquele) à direita, se fôr

$$\Phi\,\psi = 1 \text{ (operador idêntico)}$$

Por sua vez, diz-se que um operador χ é um inverso (de Φ) à esquerda, se

$$\chi . \Phi = 1$$

Pode acontecer que um operador possua inversos à esquerda e à direita: prova-se então fàcilmente que são necessàriamente iguais. Neste caso, representa-se por Φ^{-1}. (2)

Diz-se por sua vez, que Φ é então um operador reversível.

Verificam-se portanto, para todo o operador reversível Φ, as igualdades:

$$\Phi^{-1}.\Phi = \Phi.\Phi^{-1} = 1$$

Estas definições, e parte das propriedades que vamos deduzir, estendem-se mutatis mutandis, não só a qualquer álgebra com elemento unidade, mas até a qualquer semi-grupo multiplicativo com elemento unidade.(1)

Mas vejamos agora como se caracteriza um operador Φ reversível, atendendo a que é uma aplicação do conjunto E em si mesmo

(1) Chama-se semi-grupo multiplicativo todo o conjunto em que é definida uma operação sempre possível, unívoca e associativa, designada por "multiplicação".
(2) êsse inverso bilateral único, e chama-se a Φ^{-1} inverso de Φ.

A cada elemento $x \in E$ corresponde, mediante Φ, um elemento, $y = \Phi(x)$, também de E. Suponhamos agora que, inversamente, é dado arbitràriamente o elemento y em E e se procura um elemento $x \in E$ que verifique a igualdade $y = \Phi(x)$ Se um tal elemento <u>x existe e se Φ é reversível</u>, virá, aplicando Φ^{-1} aos dois membros daquela igualdade

$$\Phi^{-1}(y) = (\Phi^{-1}\Phi)(x) = x$$

Portanto, se x existe só poderá ser $\Phi^{-1}(y)$. Mas, qualquer que seja $y \in E$, o elemento $\Phi^{-1}(y)$ existe em E e verifica a referida igualdade, pois que

$$\Phi\left[\Phi^{-1}(x)\right] = (\Phi.\Phi^{-1})(x) = x$$

Em conclusão: <u>se</u> Φ <u>é reversível, existe, para cada elemento</u> y <u>de</u> E, <u>um e um só, elemento</u> x <u>de</u> E <u>tal que</u> $\Phi(x) = y$

Como se sabe, exprime-se esta última circunstância, dizendo que Φ é uma <u>aplicação biunívoca do conjunto</u> E <u>sôbre si mesmo</u>.

Reciprocamente, é fácil ver que, se Φ é uma tal aplicação, então é reversível. Em resumo:

<u>Um operador</u> $\Phi \in (E)$ <u>é reversível, se, e só se, é uma aplicação biunívoca do conjunto</u> E <u>sôbre si mesmo</u>.(1)

De resto, é bem fácil ver que o inverso dum operador linear ainda é linear,

Registemos, desde já, a seguinte propriedade: "o produto de dois operadores reversíveis é também um operador reversível, e tem como inverso o produto dos inversos aos factores por ordem inversa"; em fórmula:

$$(\Phi\Psi)^{-1} = \Psi^{-1}.\Phi^{-1}$$

A verificação é imediata; basta invocar o associatividade da multiplicação para reconhecer a legitimidade das transições seguintes:

$$\Phi.\Psi(\Psi^{-1}.\Phi^{-1}) = \Phi(\Psi.\Psi^{-1}).\Phi^{-1} = \Phi.\Phi^{-1} = 1$$

e anàlogamente

$$(\Psi^{-1}.\Phi^{-1})(\Phi\Psi) = \Psi^{-1}(\Phi^{-1}.\Phi)\Psi = 1 .$$

Estamos agora habilitados a tratar o problema da divisão de operadores. Podem precisar-se até duas modalidades de divisão: a <u>divisão à direita</u> de um operador Φ por um operador Ψ, isto é, a pesquisa de um terceiro operador, Γ, tal que $\Psi\Gamma = \Phi$;

....

(1) Os operadores reversíveis também se dizem <u>regulares</u> e os operadores não reversíveis, <u>singulares</u>

e a <u>divisão à esquerda</u>, de Φ por Ψ, isto é, a procura de um operador Δ tal que

$$\Delta\Psi = \Phi$$

É claro que, sendo Ψ reversível, qualquer daquelas divisões é de muito fácil execução: basta tomar $\Gamma = \Psi^{-1}.\Phi$, $\Delta = \Phi\Psi^{-1}$.

Por outro lado, é fácil provar que, <u>se Φ e Ψ são comutáveis e Ψ é reversível, são ainda comutáveis Φ e Ψ^{-1}</u> Na verdade, temos sucessivamente, atendendo às hipóteses,

$$\Phi\Psi^{-1} = (\Psi^{-1}\Psi)(\Phi\Psi^{-1}) = \Psi^{-1}(\Psi\Phi)\Psi^{-1} = \Psi^{-1}(\Phi\Psi)\Psi^{-1} =$$
$$= \Psi^{-1}.\Phi(\Psi.\Psi^{-1}) = \Psi^{-1}.\Phi$$

Isto é: os quocientes à direita e à esquerda de Φ por Ψ, $\Psi^{-1}.\Phi$ e $\Phi\Psi^{-1}$, são <u>iguais</u>. Podemos então (já que nenhuma ambiguidade subsiste) representar qualquer daqueles quocientes por

$$\frac{\Phi}{\Psi}$$

e chamar quociente de Φ por Ψ ao operador $\frac{\Phi}{\Psi}$. Em particular podemos passar a escrever $\frac{1}{\Psi}$ em vez de Ψ^{-1}.

Agora, já é possível precisar como se trabalha com "fracções" cujos termos são operadores lineares.

Uma propriedade que desde já podemos demonstrar diz respeito ao <u>produto</u> de fracções:

"Suponhamos que Φ_1, Ψ_1, Φ_2, Ψ_2, são operadores <u>comutáveis</u> dois a dois, e que Ψ_1 e Ψ_2 são <u>reversíveis</u>. Então

$$\frac{\Phi_1}{\Psi_1}\cdot\frac{\Phi_2}{\Psi_2} = \frac{\Phi_1.\Phi_2}{\Psi_1.\Psi_2}$$ "

Isto é: persiste a regra usual do produto de fracções.

A demonstração decorre da seguinte sequência de igualdades:

$$\frac{\Phi_1}{\Psi_1};\frac{\Phi_2}{\Psi_2} = \Phi_1.(\Psi_1^{-1}\Psi_2^{-1})\,\Phi_2 = \Phi_1(\Psi_1.\Psi_2)^{-1}.\Phi_2 =$$
$$= \Phi_1.\Phi_2.(\Psi_1.\Psi_2)^{-1} = \frac{\Phi_1\Phi_2}{\Psi_1.\Psi_2}$$

É fácil reconhecer que Φ_2 comuta com $(\Psi_1\Psi_2)^{-1} = \Psi_1^{-1}\Psi_2^{-1}$

Basta atender a que, comutando Φ com Ψ_1, também Φ comuta com Ψ_1^{-1} e Ψ_2^{-1})

Em particular, verifica-se ainda a propriedade fundamental das fracções numéricas: multiplicando ambos os termos de uma fracção por um mesmo operador, a fracção obtida representa ainda o mesmo operador que a primeira. Sòmente, exige-se agora que o operador pelo qual se multiplicam os dois termos da fracção seja um operador reversível.

Sejam Φ, Ψ, Γ operadores comutáveis dois a dois, sendo Ψ e Γ reversíveis. Tem-se òbviamente $\frac{\Gamma}{\Gamma} = 1$, e então

$$\frac{\Phi}{\Psi} = \frac{\Phi}{\Psi} \cdot \frac{\Gamma}{\Gamma} = \frac{\Phi\Gamma}{\Psi\Gamma}$$

. Está pois demonstrada a propriedade da invariância atrás referida.

A soma de fracções (cujos termos são operadores lineares) pode obter-se por uma regra análoga à usual, mas com as restrições consignadas no enunciado seguinte:

"sejam Φ_1, Φ_2, Ψ operadores comutáveis dois a dois, e seja Ψ reversível; então

$$\frac{\Phi_1}{\Psi} + \frac{\Phi_2}{\Psi} = \frac{\Phi_1+\Phi_2}{\Psi}$$ "

Esta igualdade é imediata consequência da distributividade à direita (ou à esquerda) válida na álgebra $\Lambda(E)$: na verdade,

$$\Phi_1 . \Psi^{-1} + \Phi_2 . \Psi^{-1} = (\Phi_1+\Phi_2)\Psi^{-1}$$

Por fim assinalemos mais outra coincidencia (devidamente condicionada) com as regras de cálculo usuais, para fracções:

"Se Φ, Ψ, Γ são operadores comutáveis dois a dois, e Ψ é reversível, então

$$\Gamma + \frac{\Phi}{\Psi} = \frac{\Psi\Gamma+\Phi}{\Psi} \text{ ."}$$

Efectivamente,

$$\Gamma = \Gamma . \frac{\Psi}{\Psi} \text{ ; então,}$$

$$\Gamma + \frac{\Phi}{\Psi} = \frac{\Gamma\Psi}{\Psi} + \frac{\Phi}{\Psi} = \frac{\Gamma\Psi+\Phi}{\Psi}$$

Podemos agora definir função racional de qualquer operador linear. Consideremos uma função racional qualquer, $\frac{N(x)}{M(x)}$, da variável x. Sabe-se que esta fracção se pode decompor, de maneira unívoca, do modo seguinte:

$$\frac{N(x)}{M(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{M(x)} ,$$

designando Q(x) um polinómio em x,e R(x) um polinómio de gráu inferior ao de M(x). (Por outras palavras,-sendo $\frac{R(x)}{M(x)}$ uma fracção própria).

Se $M(\Phi)$ é um operador reversível,tem sentido o símbolo que resulta do 1º membro,substituindo x por Φ:

$$\frac{N(\Phi)}{M(\Phi)} ,$$

uma vez que (segundo vimos já) $N(\Phi)$ e $M(\Phi)$,funções racionais inteiras do mesmo operador Φ,são operadores comutáveis.

E então,

$$\frac{N(\Phi)}{M(\Phi)} = Q(\Phi) + \frac{R(\Phi)}{M(\Phi)}$$

Mas,resta averiguar se $M(\Phi)$ é na verdade um operador reversível,e como invertê-lo,em tal hipótese.

Para tanto recordemos a clássica decomposição de uma fracção racional própria numa soma de fracções simples. Se fôr

$$M(x) = a_o(x-\alpha_1)^{k_1} \cdots\cdots (x-\alpha_p)^{k_p},$$

sendo $k_1,\ldots,k_p$,respectivamente,os gráus de multiplicidade de $\alpha_1,\ldots\ldots, \alpha_p$,temos sempre a possibilidade (unívoca) de calcular constantes $A_{i,j}$ tais que

$$\frac{R(x)}{M(x)} = \sum_{i=1}^{p} \left(\frac{A_{i,1}}{x-\alpha_i} + \frac{A_{i,2}}{(x-\alpha_i)^2} + \ldots\ldots + \frac{A_{i,k_i}}{(x-\alpha_i)^{k_i}}\right)$$

Se existirem todos os operadores $(\Phi-\alpha_i)^{-1}$ $(i=1,2,..,p)$ fàcilmente se reconhece que é lícito substituir em ambos os membros daquela igualdade x por Φ,obtendo-se um processo de cálculo do operador $\frac{R(\Phi)}{M(\Phi)}$ (basta atender às regras de cálculo anteriormente estabelecidas)

Por outras palavras: a possibilidade de exprimir o operador fraccionário $\frac{R(\Phi)}{M(\Phi)}$ por meio da fórmula que resulta da precedente substituindo x por Φ,- está condicionada apenas pela hipótese de os operadores $\Phi-\alpha_1,\ldots\ldots,\Phi-\alpha_p$ serem reversíveis.

Este é um facto importantíssimo,cujo alcance aumenta em virtude do facto seguinte: é verdadeira,sob forma mais geral a afirmação recíproca. Isto é,prova-se fàcilmente que,se $M(\Phi)$ é um operador reversível,então todos os operadores $\Phi-\alpha_i$ são reversíveis também,e a precedente fórmula de decomposição é válida.

Estamos pois reduzidos a inquirir em que condições é reversível o operador $\Phi-\alpha_i$,designando α_i um escalar (do corpo K dos escalares do espaço vectorial E).

Segundo resultado geral já obtido,$\Phi-\alpha_i$ será reversível quando,e só quando,definir uma aplicação biunívoca de E sôbre si mesmo. Por outras palavras: para $\Phi-\alpha_i$; ser um operador reversível,é necessário e suficiente que,para todo o vector $v\in E$ exista um e um só vector $u\in E$ tal que

$$(\Phi-\alpha_i)u = v ;$$

ou ainda,$\Phi-\alpha_i$ é reversível quando e só quando,para todo o elemento $v\in E$,a equação em u,

$$\Phi u - \alpha_i u = v$$

admitir uma e uma só solução (pertencente a E).

De um modo geral,chama-se conjunto resolvente de um operador Φ ao conjunto dos escalares λ tais que $\Phi-\lambda$ é reversível .

O complementar deste conjunto no corpo K dos escalares (que umas vezes será R,mas,com maior frequência,será o corpo complexo C) diz-se o espectro do operador Φ. Este é portanto o conjunto dos escalares λ para os quais não é reversível o operador $\Phi-\lambda$. (O conceito de "espectro" de um operador linear é de frequente emprêgo em Mecânica Quântica,donde aliás provém o uso do vocábulo "espectro" na acepção indicada). O resultado anterior pode pois formular-se agora nos seguintes termos:

Condição necessária e suficiente para que exista o operador $\frac{R(\Phi)}{M(\Phi)}$ é que as raízes do polinómio $M(\Phi)$ pertençam todas ao conjunto resolvente de Φ, ou,-o que é o mesmo,-não pertençam ao espectro deste mesmo operador.

É essa pois uma condição necessária e suficiente para ser válida a fórmula de decomposição atrás indicada,-que foi usada por Heaviside no caso de ser Φ o operador D da derivação.

Impõe-se portanto averiguar qual é o espectro do operador D.

Segundo a definição, é o conjunto dos escalares λ tais que não é reversível o operador $D-\lambda$

Para fixar ideas, suponhamos que D opera no espaço das funções indefinidamente deriváveis num intervalo. Então, o operador $D-\lambda$ será, por definição, reversível, quando e só quando, para toda a função indefinidamente derivável f, existir outra função φ nas mesmas condições, -e uma só-tal que

$$(D-\lambda)\varphi = f \text{ ,ou seja,}$$

$$D\varphi-\lambda\varphi = f$$

Isto é, tomando arbitràriamente a função f no conjunto das funções indefinidamente deriváveis, a equação diferencial

$$D\varphi-\lambda\varphi = f$$

deve ter uma, e uma só, solução (em φ). Mas aquela equação diferencial é linear de 1ª ordem, e pode pois resolver-se segundo a conhecida fórmula

$$\varphi(x) = e^{\lambda x}\int_0^x e^{-\lambda t}f(t)\,dt + C.e^{\lambda x},$$

designando C uma constante arbitrária. Portanto, o que sucede é que, para cada função f, não encontramos apenas uma função φ, mas sim uma infinidade de funções que satisfazem à condição

$$(D-\lambda)\varphi = f$$

E isto, qualquer que seja λ; quer dizer, -o operador $D-\lambda$ nunca é reversível. O espectro do operador D da derivação é portanto todo o corpo dos escalares: o conjunto resolvente de D é vazio.

Mas, como pode então existir uma função racional do operador D, $\frac{R(D)}{M(D)}$? Uma tal função carece sempre de significado, -é o que parece inferir-se das considerações feitas.

Aliás, já no caso $\lambda = 0$, não há uma só função φ tal que $D\varphi = f$: pelo contrário, sabe-se que para uma função f, existem infinitas primitivas, φ, diferindo entre si por uma constante.

E a mesma multiplicidade de soluções surge, ao encarar o caso simples de $f \equiv 0$; viria então a equação diferencial homogénea,

$$D\varphi-\lambda\varphi = 0,$$

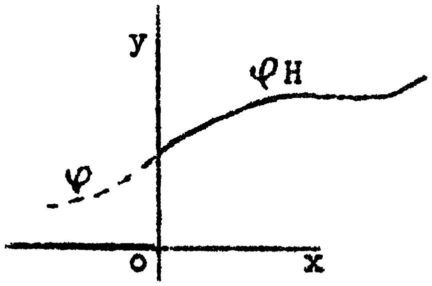
cujas soluções sabemos serem todas as funções incluidas na fórmula

$$\varphi(x) = C\,e^{\lambda x} \text{ ,onde C designa uma constan-}$$

te arbitrária.

Isto mostra-nos já que êste estado de coisas subsiste no espaço das distribuições,uma vez que a função idênticamente nula,$f \equiv o$,é também uma distribuição,a distribuição nula.

Estamos pois,aparentemente,perante uma total condenação do método simbólico. Mas esta grave dificuldade pôde ser superada,recorrendo à idea da escola de Heaviside que consiste em efectuar a truncatura ou amputação da função φ ,multiplicando-a pela função H de Heaviside.



Passa-se então ao caso oposto: o espectro do operador D torna-se vazio,ou seja,o conjunto resolvente do operador D abarca todo o corpo dos escalares. Veremos isso em pormenor na próxima lição.

É oportuno ainda apresentar a noção de <u>valor próprio</u> de um operador linear. (Como designações alternativas para "valor próprio" de um operador,usam-se também as locuções "<u>auto-valor</u> e "<u>valor caracteristico</u>").

Dado um operador Φ,diz-se que um escalar λ é um <u>valor próprio</u> daquele operador,se existir pelo menos um vector $u \neq o$ tal que

$$\Phi u - \lambda u = o \text{ ,ou seja,}$$

$$\Phi u = \lambda u \text{ .}$$

Por outras palavras: diz-se que λ é um <u>valor próprio</u> do operador Φ,quando existir pelo menos um vector $u \neq o$ (em E) tal que aplicar Φ a u equivale a multiplicar <u>u</u> pelo escalar λ .

Resulta aliás imediatamente que,se existe um vector <u>u</u> naquelas condições,há uma infinidade de vectores que também as satisfazem: são todos os vectores colineares com u,α u,com $\alpha \in K$. Na verdade,a igualdade

$$\Phi(\alpha u) - \lambda(\alpha u) = o$$

é válida para todo o $\alpha \in K$,desde que se verifique a condição

$$\Phi(u) - \lambda u = o \text{ .}$$

Como afinal a equação

$$(\Phi - \lambda)u = o$$

admite uma infinidade de soluções na hipótese de λ ser um valor próprio de Φ,concluimos que o operador $\Phi - \lambda$ não é reversível.

Então, todo o valor próprio de um operador Φ pertence ao espectro de Φ. Mas a recíproca não é, em geral verdadeira.

Todavia, nos espaços vectoriais a um número finito de dimensões, é válida a recíproca da conclusão precedente, isto é, o conjunto dos valores próprios de um operador linear coincide com o espectro deste operador. Podemos como se sabe,(1) limitar a nossa análise ao caso da potencia cartesiana do corpo K. Em particular, consideremos o caso concreto do espaço vectorial real a 2 dimensões, R^2. Vejamos que então o espectro é constituido pelos valores próprios.

Suponhamos que se trata de uma matriz quadrada de 2ª ordem,(2)

$$M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

Temos então a considerar o operador $M-\lambda$; não esqueçamos que λ représenta o operador $\lambda.I$, sendo I o operador idêntico

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Será pois

$$M-\lambda = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{bmatrix}$$

Os valores de λ para os quais a matriz escrita em último lugar é reversível formam o conjunto resolvente do operador M.

Mas dizer que esta matriz é reversível, equivale a dizer que a aplicação linear que ela define é biunívoca, e aplica R^2 sôbre R^2.

Quer dizer: o operador $M-\lambda$ é reversível se, e só se, para cada par de números reais (y_1, y_2), o sistema

$$\begin{cases} y_1 = (a-\lambda)x_1 + bx_2 \\ y_2 = cx_1 + (d-\lambda)x_2 \end{cases}$$

....

(1) um espaço vectorial a n dimensões sôbre um corpo K é isomorfo ao espaço K^n.

(2) Forma por que se pode representar todo o operador linear Φ que aplique R^2 em si mesmo.

nas incógnitas x_1 e x_2, admite apenas uma e uma só solução.

Ora, condição necessária e suficiente para que isso aconteça é que se trate de um sistema de Cramer, isto é, que o determinante

$$\begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{vmatrix}$$

seja diferente de zero.

Por outras palavras: os pontos do conjunto resolvente de M são os números λ que não anulam aquele determinante. Portanto, os pontos do espectro de M são os valores de λ que anulam aquele mesmo determinante. Mas esses valores de λ são justamente os valores próprios do operador M.

Na verdade, dizer que λ é um valor próprio da matriz M é dizer que existe pelo menos em R^2 um vector $u=(x_1,x_2)\neq o$, cujas componentes verificam o sistema

$$o = (a-\lambda)x_1+bx_2$$
$$o = cx_1+(d-\lambda)x_2$$

Ora, para este sistema homogéneo possuir soluções além da nula é necessário e suficiente que seja

$$\begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{vmatrix} = o$$

Fica assim assegurado que o espectro de M é constituido pelos valores próprios de M. Isto que se viu para matrizes de 2ª ordem, permanece válido para as matrizes reais de ordem n, isto é, a identificação do espectro de um operador linear com o conjunto dos valores próprios dêsse operador é legítima em todo o espaço R^n.

(O cálculo de funções racionais de matrizes é feito segundo as normas indicadas anteriormente, tendo em vista a decomposição em fracções simples que referimos)