INTRODUÇÃO À TEORIA DAS DISTRIBUIÇÕES

SEGUNDO AS LIÇÕES DO PROF. **J. SEBASTIÃO E SILVA,** PROFERIDAS NO CENTRO DE ESTUDOS MATEMÁTICOS DO PORTO, EM 1956-57, E COMPILADAS POR ANTÓNIO ANDRADE GUIMARÃES.

PUBLICAÇÃO SUBSIDIADA PELO INSTITUTO DE ALTA CULTURA

CÁLCULO SIMBÓLICO (continuação)

8ª lição

Vimos na última lição que, tanto no espaço das distribuições como no espaço das funções indefinidamente deriváveis num intervalo, o operador de derivação não é reversível. Mais geralmente, vimos que o operador $D-\lambda$ não é reversível, qualquer que seja o escalar λ, - o que equivale a dizer que o espectro do operador D abarca todo o plano da variável complexa.

Mas se nos limitarmos, por exemplo, às distribuições que são nulas à esquerda da origem, já esta dificuldade desaparece.

Mais precisamente: consideremos um intervalo I, ao qual seja interior a origem. Convencionaremos representar por I^- a parte negativa de I, e por I^+ a parte positiva de I. Diremos que uma distribuição sôbre I é nula à esquerda da origem, quando a sua restrição a I^- é a função idênticamente nula. Anàlogamente, diremos que uma distribuição de domínio I é nula à direita da origem, se a sua restrição a I^+ é a função nula.

Convencionaremos representar por $C_\pi^+(I)$ a classe das distribuições de domínio I, que são nulas à esquerda da origem, e por $C_\pi^-(I)$ a classe das que são nulas à direita da origem. Análogas notações podem adoptar-se para o espaço das distribuições de ordem finita em I.

É fácil ver que qualquer dos conjuntos C_π^+ e $C_\pi^-(I)$ é um sub-espaço vectorial do espaço vectorial complexo $C_\pi(I)$; e o mesmo se pode dizer para o espaço das distribuições de ordem finita em I.

Vamos mostrar que o operador D já é reversível em qualquer destes sub-espaços.

Suponhamos dada uma distribuição T em I, e procuremos determinar uma distribuição S de domínio I, cuja derivada seja T:

$$D\,S = T,$$

sendo aliás T e S distribuições nulas à esquerda da origem.

Comecemos por supôr T de ordem finita: será então $T = D^n f$, sendo $f \in C(I)$.

É fácil ver então que, tomando

$$S = D^n \mathfrak{J} f, \text{ onde } \quad \mathfrak{J} f = \int_0^x f(t)\, dt ,$$

S é uma distribuição que satisfaz à condição imposta. Quer dizer: $D^n \mathfrak{J} f$ é uma <u>primitiva</u> de T. Vamos ver que é a <u>única</u>.

Suponhamos que havia duas distribuições, S_1 e S_2, definidas em I, nulas à esquerda da origem, tais que

$$DS_1 = DS_2 = T$$

Daqui viria

$$D(S_1 - S_2) = o$$; e então, por um dos axiomas das distribuições, seria

$$S_1 - S_2 = C ,$$

designando C uma função constante em <u>todo</u> o intervalo I. Mas, como, à esquerda da origem, S_1 e S_2 são nulas, deve ser $C=o$, - e, portanto, $S_1 = S_2$

Em conclusão: a cada distribuição T de ordem finita, de domínio I, nula à esquerda da origem corresponde uma e uma só distribuição S nas mesmas condições, cuja derivada é T. Podemos pois escrever

$$S = D^{-1} T ,$$

uma vez que o operador D é, nestas condições, reversível. E podemos identificar o inverso com $\mathfrak{J}$, $D^{-1} = \mathfrak{J}$ Podemos até escrever em vez de $D^{-1}T$,

$$\int_0^x T(u)\, du .$$

É claro que num tal simbolismo, o sinal de integral não tem o sentido habitual. De resto, já assinalámos a impossibilidade de falar, no caso geral, em valor de uma distribuição T num ponto <u>u</u>, - e o símbolo T(u) não tem pois um sentido preciso. Adoptando aquela notação, temos apenas por objectivo tentar manter o mais possível o simbolismo habitual; mas não deve perder-se de vista que a semelhança que apresente porventura com a notação usual é apenas de forma, e o seu emprêgo só se justifica por motivos de comodidade.

O que se fez pressupunha que T era uma distribuição de ordem finita em I. Mas se T fôr de ordem infinita, a conclusão é a mesma: bastará, para tanto, considerar os intervalos compactos contidos em I e aos quais a origem é interior. A restrição da distribuição em causa a um dêsses intervalos é uma distribuição de ordem finita, e isto permite chegar à mesma conclusão.

Vamos agora, mais geralmente, tentar inverter o operador $D-\alpha$, sendo α um escalar qualquer. Isto é, vamos tratar de resolver a equação em S,

$$(D-\alpha)S = T ,$$

sendo T uma distribuição em I nula à esquerda da origem, e devendo ser também S uma distribuição em I nula à esquerda da origem.

Trata-se da equação diferencial

$$DS - \alpha S = T$$

Ora, podemos resolver este novo problema de modo análogo ao precedentemente seguido, fazendo uma simples mudança de variável, que corresponde afinal ao método da variação das constantes arbitrárias.

Bastará escrever

$$S = e^{\alpha x}.U ,$$

sendo U uma distribuição a determinar de modo que a equação diferencial dada se verifique.

É fácil reconhecer que, qualquer que seja a distribuição S, pode esta sempre exprimir-se daquela forma, para o que bastará tomar $U = e^{-\alpha x}.S$. (Na verdade, como $e^{-\alpha x}$ é uma função indefinidamente derivável, podemos multiplicá-la por qualquer distribuição) . Substituindo agora na equação dada, obtem-se, depois de efectuadas as devidas simplificações,

$$e^{\alpha x}.DU = T ,$$

donde se deduz, por multiplica[illegible] de ambos os membros por $e^{-\alpha x}$ (o que é sempre lícito)

$$DU = e^{-\alpha x}.T$$

É imediato que, sendo T nula à esquerda da origem, também o produto $e^{-\alpha x}T$ é nulo à esquerda da origem. Trata-se então de determinar uma distribuição nula à esquerda da origem, U, que verifique a última equação escrita. Estamos pois no caso anterior: dentro de $C^{+}_{*}(I)$, determinar uma distribuição cuja derivada é conhecida.

Sabe-se já que existe uma e uma só distribuição naquelas condições: a distribuição $U = D^{-1}.e^{-\alpha x}T$, que pode escrever-se ainda sob a forma

$$\int_0^x e^{-\alpha t} T(t)dt$$

Será então

$$S = e^{\alpha x} \int_0^x e^{-\alpha t} T(t)dt = \int_0^x e^{\alpha(x-t)} T(t)dt$$

Ora,esta forma[1] que demos à solução permitirá dar-lhe uma interpretação útil.

Podemos resumir a análise feita nos seguintes termos:

dada uma distribuição T,nula à esquerda da origem,existe uma e uma só distribuição S,também nula à esquerda da origem, que verifica a condição $(D-\alpha)S = T$,qualquer que seja o escalar α. Quer dizer,-o operador $D-\alpha$ é sempre reversível,qualquer que seja o escalar α

A situação é exactamente oposta à que se nos deparou no final da última lição: agora,o espectro do operador D reduz-se ao conjunto vazio,todos os pontos do plano complexo são pontos do conjunto resolvente.

E pode escrever-se,precisamente:

$$\frac{1}{D-\alpha} T = \int_0^x e^{\alpha(x-t)} T(t)dt$$

Podemos aliás dar à expressão do 2º membro outra forma especialmente útil,mediante o recurso ao conceito produto de composição.

Dadas duas funções contínuas f e g,chama-se produto de composição de f por g à direita da origem à função de x

$$\int_0^x f(x-t)g(t)dt$$

....

(1) Para reconhecer a legitimidade da transformação efectuada, basta observar que o símbolo $\int_0^x e^{\alpha(x-t)} T(t)dt$ representa o resultado das duas seguintes operações: 1) achar a primitiva de $e^{\alpha(x-t)}T(t)$, considerando t como variável independente e x como constante; 2) substituir,no final,t por x. É claro que,nestas condições,$e^{\alpha x}$ se comporta na primeira operação como um factor constante que permuta portanto com D^{-1}.

Abreviadamente uma tal função representa-se pelo símbolo

$$(f * g)(x)$$

Este conceito generaliza-se imediatamente ao caso em que g é uma distribuição nula à esquerda da origem e f uma função indefinidamente ierivável. (Veremos oportunamente que se generaliza mesmo ao caso em que f e g são duas distribuições nulas à esquerda da origem e ainda a outros casos).

Tendo em vista propriedades bem conhecidas do integral, é fácil reconhecer que o produto de composição é <u>comutativo, associacivo e distributivo</u>. (Disto ainda trataremos, em pormenor, mais adiante).

De momento, é a associatividade que nos importa utilisar.

Podemos agora reconhecer que a fórmula a que tínhamos chegado se pode escrever

$$\frac{1}{D-\alpha} T = e^{\alpha x} * T \ ;$$

e é agora fácil determinar o resultado da aplicação do operador $\frac{1}{(D-\alpha)^2}$ a uma distribuição T. Na verdade, temos sucessivamente

$$\frac{1}{(D-\alpha)^2} T = \frac{1}{D-\alpha} \left(\frac{1}{D-\alpha} T\right) = e^{\alpha x} * (e^{\alpha x} * T) =$$

$$= (e^{\alpha x} * e^{\alpha x}) * T \ ,$$ sendo esta última transitividade legitimada pela <u>associatividade</u> já referida do produto de composição. Resta calcular $e^{\alpha x} * e^{\alpha x}$

Segundo a definição, será

$$e^{\alpha x} * e^{\alpha x} = \int_0^x e^{\alpha(x-t)} . e^{\alpha t} dt = \int_0^x e^{\alpha x} dt = x . e^{\alpha x}$$

Portanto,

$$\frac{1}{(D-\alpha)^2} T = (x . e^{\alpha x}) * T$$

Raciocinando agora por indução, podíamos estabelecer a fórmula seguinte, que generaliza e resume as anteriores:

$$\frac{1}{(D-\alpha)^n} T = \left(\frac{x^{n-1}}{(n-1)!} e^{\alpha x}\right) * T \qquad (1)$$

Uma vez provado que o espectro do operador D se reduz ao conjunto vazio,(isto é,assegurado que o conjunto resolvente de D é todo o plano da variável complexa) segue-se (de acordo com o que se viu na lição anterior) que está definida *tôda a função racional* do operador D. Para explicitar a respectiva definição,bastará aplicar a fórmula de decomposição aditiva que indicámos,em "fracções simples" do tipo $\dfrac{A_{ij}}{(D-\alpha_i)^j}$

Como os A_{ij} são constantes numéricas,a função racional de D, $\dfrac{R(D)}{M(D)}$, reduz-se a um somatório de combinações lineares de operadores do tipo $\dfrac{1}{(D-\alpha)^n}$,cuja incidência sôbre qualquer distribuição T se determina de acôrdo com a fórmula (1) anterior.

Está assim resolvido completamente o problema das funções racionais do operador D. Podemos formular o resultado sob a forma do seguinte

Teorema: " *Quando o operador D é restringido ao espaço* $C^{+}_{\pi}(I)$ *das distribuições nulas à esquerda da origem,o espectro de D reduz-se ao conjunto vazio*."(*em particular,D fica reversível*). *E daqui resulta que fica automàticamente definida qualquer função racional do operador D.*[1]

Podemos até dizer que as funções racionais de D formam um *corpo*,-isto é,podemos trabalhar com elas,aplicando todas as regras que são válidas num corpo.[2]

....

(1) Não esquecer que,segundo convenção anterior,ao falar de funções racionais do operador D,se subentende sempre que os coeficientes são escalares,isto é,números (reais ou complexos).

(2) Pode mesmo demonstrar-se,fàcilmente que o corpo das funções racionais de D é isomorfo ao corpo das funções racionais duma variável numérica x. (cf. A.CÉSAR DE FREITAS, "Sur les distributions qui interviennent dans le calcul symbolique des électrotecniciens",Rev.Fac.Ciências,Lisbôa, 2ª série A.,vol.3(1954-55),pg.95-128).

<u>Neste facto reside o sentido preciso da afirmação "é lícito tratar o poperador D como se fôsse um símbolo numérico"</u>

Manifestamente, resultados análogos subsistem para $C_{\bar{a}}^{-}(I)$.

Antes de mostrar como estes resultados intervêm no método simbólico de integração de certas equações diferenciais, convem registar ainda algumas fórmulas, úteis na prática, que dizem respeito ao produto de composição de uma função indefinidamente derivável pela função impulsiva δ e as suas derivadas.

Seja $\varphi(x)$ uma função indefinidamente derivável. É então fácil reconhecer que

$$\varphi(x) * \delta = \varphi(x).H(x)$$

Em geral, teremos a seguinte fórmula:

$$\varphi(x) * \delta^{(n)} = (-1)^n \varphi^{(n)} H + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \varphi^{(n-k)} \delta^{(k-1)}$$

(Deixa-se a verificação, como exercício, ao cuidado do leitor)

Na prática, acontece frequentemente que os termos em δ e suas derivadas, desaparecem, ficando apenas em jôgo a parte funcional do 2º membro, $(-1)^n \varphi^{(n)} H$

Importa não perder de vista que os resultados até agora obtidos dizem respeito a distribuições <u>nulas à esquerda</u> da origem.

Ora, vimos anteriormente que o proeesso de "truncatura" de funções adoptado pela escola de Heaviside (que consiste em multiplicar cada função pela função H(x) de Heaviside) conduz a substituir funções arbitrárias por funções <u>nulas à esquerda</u> da origem.

Impõi-se pois averiguar quais são as distribuições para as quais tem efectivamente sentido êsse processo de truncatura, -do ponto de vista que interessa ao Cálculo Simbólico.

Trata-se de definir o produto de T por H. Ora, H é uma função localmente somável, -mas está longe de ser indefinidamente derivável. Este facto parece obrigar T a ser também uma função. Obrigaria na verdade, segundo a teoria do produto aqui exposta. (Pág.59 e seguintes): se T não fôr uma função (aliás, indefinidamente derivável) o produto TH não tem sentido, segundo aquela teoria. Mas já advertimos (pág.75) que há diversas teorias da multiplicação de distribuições. Assim, vamos dar um sentido ao produto T.H, para o fim especial que temos em vista. De acordo com o conceito a adoptar, o produto T.H terá sentido quando a distribuição T se reduzir a uma função localmente somável à esquerda da origem. E, nestas condições será, por definição,

$$T.H = T - \varphi,$$

designando por φ a função localmente somável assim definida:

$$\varphi = \begin{cases} T & \text{em } I^- \\ 0 & \text{em } I^+ \end{cases}$$

Estamos a supôr que a restrição de T a I^- é localmente somável. Se subtrairmos a T a função φ, definida naquelas condições, obtemos uma distribuição que é nula à esquerda da origem, e que não difere de T à direita. Ora, nisto consiste precisamente a truncatura.[1]

Analisemos o que se passa com as derivadas. Para isso, suponhamos que a função φ (isto é, T, à esquerda da origem) admite derivadas no intervalo I^- até à ordem n, e que além disso tanto a função φ como essas derivadas têm limite lateral à esquerda da origem. Isso implica portanto

$$\varphi(0^-) = T(0^-)$$

$$\varphi'(0^-) = T'(0^-)$$

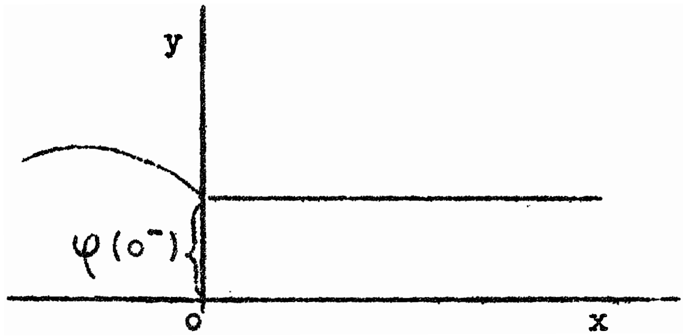
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\varphi^{(n)}(0^-) = T^{(n)}(0^-)$$

Posto isto, consideremos a função

$$\varphi_1 = \varphi + \varphi(0^-).H$$

(1) Poderíamos ainda ampliar esta definição; mas já nos é largamente suficiente.



É evidente que a função φ_1 assim obtida é <u>contínua</u> em todos os pontos. É mesmo <u>absolutamente contínua</u>, porque admite derivada em todos os pontos, excepto (quando muito) na origem.

Podemos pois derivar

$$T.H = T - \varphi_1 + \varphi(o^-)H \text{ ,}$$

obtendo-se a igualdade (1)

$$D(TH) = (DT - \varphi_1') + \varphi(o^-)\delta$$

Vejamos agora qual o significado de $\varphi_1'(x)$.
Imediatamente se reconhece que

$$\varphi_1'(x) = \begin{cases} DT(x) & \text{em } I^- \\ o & \text{em } I^+ \end{cases}$$

Então, segundo a definição que adoptámos de produto de uma distribuição por H, é

$$DT - \varphi_1' = (DT).H \text{ ;}$$

portanto a igualdade precedente pode escrever-se sob a forma

$$D(TH) = (DT).H + \varphi(o^-)\delta,$$

que é a fórmula que resolve o problema das relações entre as operações de <u>derivação</u> e de <u>truncatura</u> de distribuições

....

(1) Observe-se que φ_1', derivada de uma função absolutamente contínua, é uma derivada no sentido usual

O problema análogo para as derivadas seguintes é agora de fácil resolução. Para a 2ª derivada da truncatura TH, por exemplo, bastará aplicar duas vezes o resultado anterior, o que dá

$$D^2(TH) = (D^2T).H + \varphi'(o^-)\delta + \varphi(o^-)\delta'$$

E, dum modo geral, obtém-se por indução a fórmula seguinte:

$$D^n(TH) = (D^nT).H + \varphi^{(n-1)}(o^-)\delta + \ldots\ldots + \varphi(o^-)\delta^{(n-1)}$$

Esta fórmula já era usada (para o caso de ser T uma função) pela escola de Heaviside, mas precisava de ser aqui justificada, porque, na realidade, é utilizada o mais das vezes na hipótese de ser T uma distribuição.

Poderia aliás deduzir-se a mesma fórmula em condições ainda mais gerais, mas isso não teria interêsse para o fim em vista.

Vamos novamente analisar a aplicação do método simbólico, começando pelo caso de uma equação diferencial linear de ordem n, de coeficientes constantes:

$$(1) \quad a_0D^nS+a_1D^{n-1}S+\ldots+a_{n-1}DS+a_nS = T$$

Repare-se em que T é aqui uma distribuição <u>conhecida</u>, à qual se impõi apenas a seguinte condição: no intervalo I^- <u>reduz-se a uma função localmente somável.</u> Esta condição poderia ser ainda mais ampla: de qualquer modo, observe-se a que distância já estamos da teoria clássica das equações diferenciais !

Pretende-se achar uma distribuição S que verifique a equação diferencial dada, (1), e ainda satisfaça às condições iniciais seguintes:

$$S(0^-) = c_0 , S'(0^-) = c_1 ,\ldots\ldots, S^{(n-1)}(0^-) = c_{n-1}$$

designando $c_0, c_1, \ldots, c_{n-1}$ constantes arbitrárias. Quer dizer: não são impostos os valores da distribuição ingógnita e das suas derivadas na origem,mas sim os respectivos limites laterais à esquerda da origem.

Pode compreender-se,mesmo a-priori,que isto seja necessário. Consideremos por exemplo,o caso de um circuito eléctrico: pode muito bem acontecer que haja na origem dos tempos um "salto",uma brusca variação,tomando para incógnita a intensidade da corrente num dado ramo.

Se (em certas circunstâncias,efectivamente ocorrentes) a intensidade da corrente apresentar uma brusca variação na origem,-que sentido faria falar de valor da incógnita na origem? Certamente nenhum: mas fará sentido falar de limite à esquerda da origem !

Portanto,as condições iniciais (do tipo que adoptámos) resumem,por assim dizer,tôda a"história"do sistema cuja evolução é descrita pela equação diferencial dada.

Aplicamos agora o processo da truncatura. Para isso será cómodo escrever a equação dada sob a forma abreviada seguinte:

$$P(D)S = T ,$$

designando por P(D) o polinómio operacional

$$a_0 D^n + \ldots\ldots\ldots + a_{n-1} D + a_n$$

(Como se sabe,ao polinómio $P(x) = a_0 x^n + \ldots + a_n$ chama-se polinómio característico da equação diferencial dada, no caso clássico das funções).

Para efectuar pois a truncatura das distribuições conhecida e incógnita,T e S respectivamente,o que há a fazer é multiplicar ambos os membros da equação P(D)S = T por H,o que dará

$$\left[P(D)S\right] H = T.H$$

Utilizando em sentido inverso as fórmulas há pouco deduzidas para truncatura das derivadas sucessivas de TH,é fácil ver que se chega ao seguinte resultado:

$$P(D)(SH) = TH + \sum_{i=0}^{n-1} \gamma_i \delta^{(i)} ,$$

sendo os γ_i combinações lineares das constantes iniciais;

$$\gamma_i = a_o c_{n-i-1} + a_1 c_{n-i-2} + \ldots + a_{n-i-1} c_o$$

$$(i = 1,2,\ldots,n-1)$$

E já agora se reconhece bem o seguinte: se existe uma distribuição S que verifique a equação diferencial dada e satisfaça as condições iniciais dadas,o produto SH só pode ser o que decorre da igualdade seguinte:

$$SH = \frac{1}{P(D)} \left[TH + \sum_{i=0}^{n-1} \gamma_i \delta^{(i)} \right]$$

É claro que $\frac{1}{P(D)}$ é uma função racional do operador D. Para explicitar a sua incidência sôbre uma distribuição,bastará decompor o polinómio característico P(x) em factores lineares,e aplicar a fórmula de decomposição aditiva em fracções simples como foi oportunamente indicado.

Resta saber se existe de facto uma distribuição S satisfazendo a todas as exigências apontadas.

Para esta demonstração de existência,convém considerar a função $H^* = 1-H$. Poremos então,por definição:

$$TH^* = T - TH$$

Daqui resulta que

$$T(H+H^*) = TH + TH^* = T$$

Depois,deduzem-se fórmulas análogas que dão,no caso geral,

$$D^k(TH) = (D^kT).H^* - \varphi^{(k-1)}(o^-)\delta - \ldots\ldots - \varphi(o^-)\delta^{(k-1)}$$

(Comparar com a fórmula da pág. 108)

Para obter a solução da equação diferencial dada à esquerda da origem,convém multiplicar ambos os membros da equação dada, $P(D).S = T$, por H^*, o que dá a equação seguinte:

$$\left[P(D).S\right]H^* = T.H^*$$

É óbvio que TH^* será uma distribuição nula à direita da origem.

Podemos agora proceder de maneira análoga à de hà pouco com H^* ; e então a parte negativa SH^* da incógnita S, resultará da equação

$$P(D)(SH^*) = T.H^* - \sum_{i=1}^{n-1} \gamma_i \, \delta^{(i)} ,$$

quer dizer, será

$$SH^* = \frac{1}{P(D)} \left[TH^* - \sum_{i=1}^{n-1} \gamma_i \, \delta^{(i)}\right]$$

Tinhamos hà pouco encontrado

$$SH = \frac{1}{P(D)} \left[TH + \sum_{i=1}^{n-1} \gamma_i \, \delta^{(i)}\right]$$

Convencionaremos representar por S_2 e S_1, respectivamente os segundos membros das duas últimas igualdades escritas. Quer dizer, verificam-se as igualdades seguintes:

$$P(D)S_1 = TH \ , \ P(D)S_2 = TH^*$$

Somando ordenadamente, e atendendo a que $P(D)$ é um operador linear, vem:

$$P(D)(S_1+S_2) = T(H+H^*) = T \ .$$

Portanto, S_1+S_2 é de facto uma solução da equação diferencial proposta,

$$P(D)S = T$$

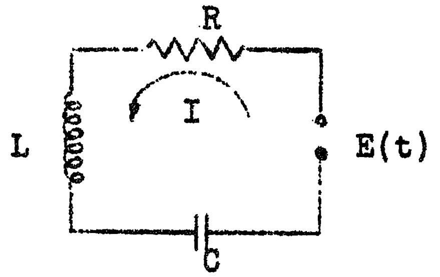
Restava agora ver se $S = S_1+S_2$ verifica de facto as condições iniciais. A maneira melhor de fazer essa verificação é mostrar à-priori que S_1+S_2 satisfaz na verdade às condições iniciais dadas.

(Recorrer às fórmulas resolventes e verificar por substituição ulterior que as condições iniciais são satisfeitas pela distribuição S_1+S_2 seria muito mais laborioso) Não faremos porém aqui essa verificação, aliás simples, para não alongar demasiado a exposição. Note-se entretanto o seguinte:

A técnica usada para a determinação de SH e SH^* mostra que a solução da equação $P(D)S = T$ que verifica as condições iniciais consideradas só pode ser $S_1+S_2 = SH + SH^*$. Assim, além de existência de solução, fica provada a sua unicidade, uma vez que lhe sejam impostas as referidas condições iniciais.

Passemos agora ao caso dos sistemas de equações diferenciais. Antes de abordar a aplicação do método simbólico em tal caso, convém recordar como se apresentam os sistemas de equações diferenciais lineares de coeficientes constantes no estudo de circuitos eléctricos de constantes concentradas.

O caso mais simples que se apresenta é o de um circuito fechado simples, isto é, com uma só malha, na qual supomos existir uma força electromotriz E, função do tempo, uma resistência óhmica R, um coeficiente de auto-indução L, e um condensador, de capacidade C.



Sabe-se que a intensidade I(t) de corrente num tal circuito satisfaz à equação diferencial seguinte:

$$L \frac{dI}{dt} + RI + \frac{1}{C} \int_{-\infty}^{t} I(\zeta)\, d\zeta = E$$

supondo fixado um sentido positivo no circuito, por exemplo, o sentido contrário ao dos ponteiros do relógio.

Observe-se que o integral ali escrito representa a quantidade de electricidade acumulada no condensador até ao instante t. Dividindo-o pela capacidade C, obtemos a diferença de potencial, oposta a E, entre as duas armaduras do condensador. Por outro lado, a corrente I introduz no circuito, em virtude da auto-indução L, uma tensão interna oposta a E e igual, em cada instante, a $L \frac{dI}{dt}$. Observe-se por último que a intensidade I é positiva ou negativa, conforme a corrente circula no sentido positivo ou negativo; e que a tensão externa E, em cada instante, é positiva ou negativa conforme a diferença de potencial entre os extremos (polos) da parte externa do circuito é positiva ou negativa a respeito do sentido fixado).

Este é o caso mais simples de equação representativa do regime de um circuito eléctrico: mas já se trata, como se vê, de uma equação que não é diferencial, - é uma equação de tipo mais complicado, íntegro-diferencial, uma vez que comporta, além de uma derivada, um integral.

É porém fácil reduzir aquela equação a uma eq. diferencial: basta tomar como incógnita a quantidade Q de electricidade armazenada no acumulador até ao instante t, isto é, desde - até t. Como então se tem $I = \frac{dQ}{dt}$, a equação íntegro-diferencial escrita assume o aspecto seguinte:

$$L \frac{d^2Q}{dt^2} + R \frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C} Q = E$$

Trata-se agora de uma equação diferencial linear de 2ª ordem de coeficientes constantes.

Temos aliás de acrescentar uma condição inicial, que consiste em fixar a quantidade de electricidade existente no condensador no instante o; seja Q_o (Observe-se que é fácil trabalhar também com a equação íntegro-diferencial a que chegamos hà pouco, sem transitar para uma equação puramente diferencial em nova variável).

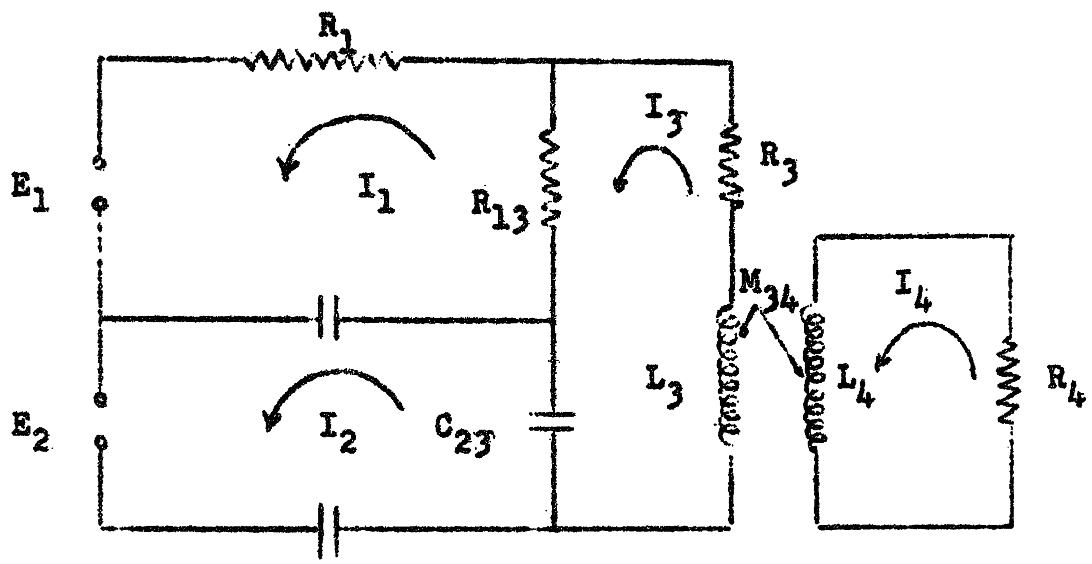
....

Passemos agora ao caso mais geral: suponhamos que se trata de um circuito mais complicado, com várias malhas, e até, eventualmente, desconexo, isto é, constituido por cnrcuitos separados, embora associados por meio de indução mútua (caso dos transformadores). Podemos ter mais de uma força electromotriz exercida em cada um dos ramos dêste circuito: o que hà a fazer então é considerar as diferentes malhas, e atendendo às leis de Kirchoff, deduzir daí equações diferenciais. É manifestamente indispensável que essas equações sejam independentes: hà então que seguir um critério de escôlha das malhas de maneira a obter equações independentes. Um dos processos mais práticos consiste em considerar as chamadas correntes de malhas.

Suponhamos o circuito esquematizado num plano. Chamaremos então células às malhas mínimas, isto é, às malhas que não contêm outras menores, e atribuiremos a cada célula uma corrente fictícia, de forma tal que num ramo comum a duas células, a corrente real seja a soma das duas fictícias que lá passam, com o devido sinal. (Para isso, há sempre que fixar um sentido positivo de percurso, - por exemplo, o sentido contrário ao do movimento dos ponteiros de um relógio). Então teremos já a certeza de que as equações que se obtiverem são de facto <u>independentes</u>.

Ilustremos com um exemplo o que se acaba de dizer. (Figura junta).

Numeremos as malhas, afectando do respectivo índice as intensidades correspondentes; quanto às fôrças electromotrizes, resistências e tensões, poderemos adoptar a convenção seguinte: quando um mesmo elemento pertencer a duas malhas, utilisaremos dois índices, correspondentes àquelas duas malhas, (Assim, por exemplo, aparecerá uma capacidade C_{12}; na malha 2, à qual pertence exclusivamente, situa-se outra capacidade, C_2. etc). Observe-se que entre as malhas 3 e 4 se exerce uma indução mútua, que designaremos por M_{34}.



Vejamos, por exemplo, o que nos dá a malha 1:

$$R_1 I_1 + R_{13}(I_1 - I_3) + \frac{1}{C_{12}} \int_{-\infty}^{t} (I_1 - I_2)\, d\tau = E_1$$

designando por E_1 a força electromotriz da 1ª célula.

A 2ª malha dá, (designando por E_2 a respectiva fôrça electromotriz)

$$\frac{1}{C_{12}} \int_{-\infty}^{t} (I_2-I_1)\, d\tau + \frac{1}{C_2} \int_{-\infty}^{t} I_2\, d\tau + \frac{1}{C_{23}} \int_{-\infty}^{t} (I_2-I_3)\, d\tau = E_2$$

Da análise da 3ª malha, deduzimos

$$R_{13}(I_3-I_1) + R_3 I_3 + \frac{1}{C_{23}} \int_{-\infty}^{t} (I_3-I_2)\, d\tau + I_3 \frac{dI_3}{dt} + M_{34} \frac{dI_4}{dt} = o$$

Na 4ª malha, obtemos

$$L_4 \frac{dI_4}{dt} + M_{34} \frac{dI_3}{dt} + R_4 I_4 = o$$

Uma vez determinadas, mediante o sistema de 4 equações íntegro-diferenciais a que chegámos, as intensidades I_1, I_2, I_3, I_4 em função do tempo, ficaremos a conhecer o <u>regime</u> do circuito desconexo que estivemos a analisar. Aquele sistema de equações integro-diferenciais pode ser tratado directamente pelo método simbólico.

Mas pode também ser substituido por outro sistema de equações diferenciais lineares de 2ª ordem de coeficientes constantes.

De um modo mais geral, iremos estudar a integração de um sistema de equações diferenciais lineares de coeficientes constantes. E veremos também com exemplos concretos que se torna aqui já inevitável o emprego das distribuições: estas deixam de ser apenas instrumento cómodo, aparecem mesmo como indispensáveis para o estudo correcto dos fenómenos.