

INTRODUÇÃO À TEORIA DAS DISTRIBUIÇÕES

SEGUNDO AS LIÇÕES DO PROF. J. SEBASTIÃO
E SILVA, PROFERIDAS NO CENTRO DE ESTUDOS
MATEMÁTICOS DO PORTO, EM 1956-57, E COM-
PILADAS POR ANTÓNIO ANDRADE GUIMARÃES.

PUBLICAÇÃO SUBSIDIADA PELO INSTITUTO DE ALTA CULTURA

Resolução de sistemas de equações diferenciais
lineares de coeficientes constantes

Antes de abordar o estudo dos sistemas de equações diferenciais lineares, convém fazer uma referência a uma outra forma de Cálculo simbólico, ainda não considerada nas lições anteriores.

O cálculo das funções racionais do operador D que foi aqui anteriormente estabelecido tem como principal objectivo a integração de equações diferenciais lineares de coeficientes constantes, ou de sistemas de tais equações, com dados iniciais a satisfazer.

Mas, como se sabe, muitas vezes interessa conhecer não o integral que verifica determinadas condições iniciais, -mas sim o integral geral. Vamos ver que o Cálculo Simbólico pode, em parte, ser modificado de modo a permitir obter directamente o integral geral duma equação ou dum sistema. Para isso fazemos algumas considerações de ordem geral.

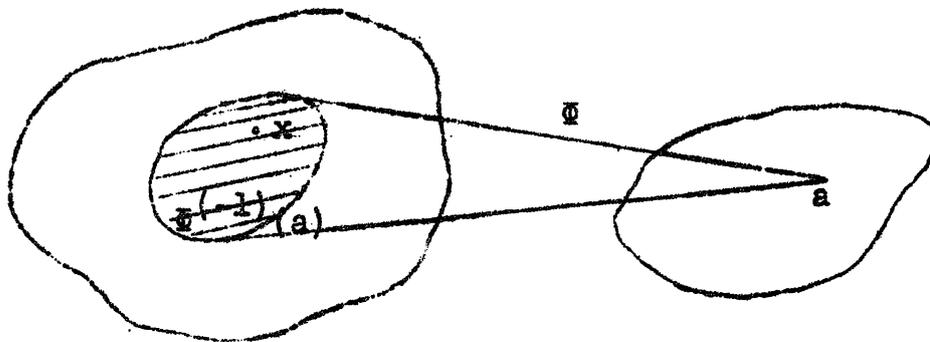
Dada uma aplicação \mathfrak{A} de um conjunto E num conjunto F , chama-se imagem inversa completa de um elemento $a \in F$ ao conjunto de todos elementos x de E que são transformados em a por meio de \mathfrak{A} , -isto é, o conjunto de todos os elementos $x \in E$ tais que

$$\mathfrak{A}(x) = a$$

A imagem inversa completa de a designa-se pelo símbolo $\mathfrak{A}^{(-1)}(a)$

.....

(1) Para um estudo pormenorizado dos assuntos que vão ser tratados nesta lição, pode consultar-se uma memória de ANTÓNIO CÉSAR DE FREITAS, a publicar oportunamente na Revista da Faculdade de Ciências de Lisboa e na qual se estabelecem vários dos resultados aqui expostos.



Vê-se assim que, em geral, o símbolo $\mathfrak{D}^{(-1)}$ representa um operador plurívoco, que a cada elemento $a \in F$ faz corresponder uma parte de E .

Suponhamos agora que E e F são espaços vectoriais sobre um mesmo corpo K ; e que \mathfrak{D} e Ψ são aplicações lineares de E em F

Define-se a soma de $\mathfrak{D}^{(-1)}$ com $\Psi^{(-1)}$ mediante a igualdade:

$$\left[\mathfrak{D}^{(-1)} + \Psi^{(-1)} \right] (x) = \mathfrak{D}^{(-1)}(x) + \Psi^{(-1)}(x) ,$$

em que o 2º membro representa o conjunto de todos os elementos que se obtêm somando cada um dos elementos do conjunto $\mathfrak{D}^{(-1)}(x)$ com cada um dos elementos do conjunto $\Psi^{(-1)}(x)$

Anàlogamente, o produto por um escalar k pode definir-se do modo seguinte:

$$\left[k \cdot \mathfrak{D}^{(-1)} \right] (x) = \mathfrak{D}^{(-1)}(kx) .$$

Exemplifiquemos com o operador D definido no conjunto de todas as distribuições.

Seja T uma distribuição qualquer.

O símbolo $D^{(-1)}T$ representa evidentemente a totalidade das distribuições, S , tais que $DS = T$. Quer dizer, $D^{(-1)}T$ representa o conjunto de todas as primitivas de T

Suponhamos que $T = D^n f$, com $f \in C(I)$. Então uma primitiva de T será

$$S = D^n \int_c^x f(t) dt$$

designando por c um ponto qualquer do intervalo I .

Qualquer outra primitiva de T obtém-se a partir daquela, por adição de uma constante.

Ora o integral entre c e x de uma distribuição não é, em geral, definido: no entanto, para manter tanto quanto possível as notações a que estamos habituados, convencionaremos representar pela notação

$$\int^x T(t) dt$$

uma das primitivas de T , escolhida arbitrariamente. Assim, o conjunto de todas as primitivas de T será

$$\int^x T(t) dt + C,$$

designando C uma constante arbitrária.

Outra convenção que convém adoptar por vezes é a seguinte: quando não haja perigo de confusão, em lugar do símbolo $\mathfrak{D}^{(-1)}$ poderá usar-se o símbolo $\frac{1}{\mathfrak{D}}$. No 1.º destes símbolos, o expoente -1 colocado entre parêntesis lembra explicitamente que possivelmente o operador \mathfrak{D} não é reversível, e portanto o inverso de \mathfrak{D} não existe (eventualmente) como operador unívoco.

Todavia, e sempre que isso não sustite confusão, usar-se-á o símbolo $\frac{1}{\mathfrak{D}}$ para significar o mesmo que o símbolo $\mathfrak{D}^{(-1)}$.

Recordemos agora que o cálculo das funções racionais de um operador D , representadas por fracções $\frac{P(D)}{Q(D)}$, cujos termos são polinómios em D , -recordemos que esse cálculo foi estabelecido unicamente no caso em que o operador D se restringe, por exemplo, ao espaço das distribuições nulas à esquerda da origem, ou nulas à direita da origem. Ainda pode, aliás, estabelecer-se esse cálculo noutros casos, nos quais se possa assegurar a reversibilidade do operador $D - \alpha$, qualquer que seja o escalar α . Vimos também que o cálculo dessas funções racionais do operador D se faz mediante uma fórmula muito simples.

Pois bem: no caso particular em que o numerador, $P(D)$, se reduz a uma constante, $P(D) = k$, e só nesse caso, a fórmula que utilizámos (para cálculo das funções racionais de D , em $C_{\mathbb{R}}^-(I)$ ou $C_{\mathbb{R}}^+(I)$), continua a ser válida mesmo quando D é definido no espaço de todas as distribuições, desde que se adoptem as convenções precedentes.

Para aplicar essa fórmula, precisamos saber a que conduz o símbolo $(D - \alpha)^{-1}$ ao incidir sobre uma distribuição T , ou seja, qual é o significado de

$$\frac{1}{D - \alpha} \cdot T$$

Trata-se do conjunto de todas as distribuições S que verificam a condição diferencial seguinte:

$$DS - \alpha S = T$$

Raciocinando agora como no caso anterior, (8ª lição) chega-se facilmente à conclusão de que o integral geral desta equação em S é

$$S = e^{\alpha x} \int e^{-\alpha t} T(t) dt + C e^{\alpha x}$$

É esta uma expressão bem conhecida da teoria clássica, -mas temos de dar sentido ao integral indefinido ali presente: representa, como se sabe, uma primitiva da distribuição $e^{-\alpha t} T(t)$, na qual se substitui t por x . Ora, raciocinando como no último dia, podemos dar ainda àquela expressão a forma

$$S = \int e^{\alpha(x-t)} T(t) dt + C e^{\alpha x}$$

Mais geralmente, o símbolo $\frac{1}{(D - \alpha)^n} T$ representa o conjunto de todas as distribuições S da forma

$$S = \int \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} e^{\alpha(x-t)} T(t) dt + C_1 e^{\alpha x} + C_2 x e^{\alpha x} + \dots + C_n x^{n-1} e^{\alpha x}$$

designando C_1, C_2, \dots, C_n constantes arbitrárias. (Tal como na lição anterior, o símbolo de integral está a indicar uma primitivação em ordem a t , seguida duma substituição de t por x)

E, finalmente, sendo válida aquela fórmula (como facilmente se verifica por indução) podemos reconhecer que o integral geral de uma equação diferencial linear de coeficientes constantes

$$P(D)S = T$$

é dado pela fórmula

$$S \Rightarrow \sum_{i=1}^p \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x-t)^{\eta_i-1}}{(\eta_i-1)!} e^{\alpha_i(x-t)} T(t) dt + \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^{r_i} C_{ij} x^j e^{\alpha_i x}$$

em que C_{ij} ($i=1, \dots, p$; $j=1, \dots, r_i$) são constantes arbitrárias

simples [Basta utilizar a decomposição de $\frac{1}{P(D)}$ em fracções

$$\frac{1}{P(D)} = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^{r_i} \frac{A_{i,j}}{(D-\alpha_i)^j}]$$

O 2º somatório da expressão geral dá todas as distribuições

$S \in P(D)^{(-1)}$, isto é,

$$\sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^{r_i} C_{ij} x^j e^{\alpha_i x}, \text{ é como logo se reconhece}$$

-o integral geral da equação homogénea $P(D)S = 0$ associada à equação inicial, integral este que coincide com o que é fornecido pelo método clássico para equações diferenciais ordinárias.

Observe-se pois este facto importante: na passagem da teoria das funções para a teoria das distribuições, o integral geral da equação homogénea não se modifica! Trata-se, é claro, de equações homogéneas de coeficientes constantes, mas este facto foi mesmo demonstrado por Schwartz para as equações diferenciais lineares cujos coeficientes são funções indefinidamente deriváveis.

Esse facto deveras importante é, consequência do axioma D^n_3 das distribuições, segundo o qual, se fôr $DT = 0$, a distribuição T reduz-se necessariamente a uma constante: $T = C$. Daqui já tínhamos inferido que, se a derivada de ordem n de uma distribuição é nula, essa distribuição é um polinómio de grau inferior a n ; agora chegamos bastante mais longe.

Uma vez mais ressalta a importancia decisiva do axioma D^n_3 , na estruturação da Teoria das Distribuições.

Posto isto, podemos tratar dos

sistemas de equações diferenciais lineares de coeficientes constantes.

Dá-se este nome a todo o sistema de equações do tipo

$$(1) \left\{ \begin{array}{l} P_{11}(D)S_1 + P_{12}(D)S_2 + \dots + P_{1n}(D)S_n = T_1 \\ P_{21}(D)S_1 + P_{22}(D)S_2 + \dots + P_{2n}(D)S_n = T_2 \\ \dots \\ \dots \\ P_{m1}(D)S_1 + P_{m2}(D)S_2 + \dots + P_{mn}(D)S_n = T_m \end{array} \right.$$

sendo T_1, T_2, \dots, T_m distribuições conhecidas, S_1, S_2, \dots, S_n distribuições incógnitas, e $P_{ij}(D)$ polinómios em D de coeficientes escalares. ("constantes").

É claro que podemos, abreviadamente, representar o sistema anterior sob a forma

$$\sum_{j=1}^n P_{ij}(D)S_j = T_i \quad (i=1, 2, \dots, m).$$

Para abordar o estudo de tais sistemas, convém estabelecer desde já um princípio de equivalência de grande utilidade.

Suponhamos o sistema precedente escrito sob a forma condensada seguinte

$$X_i = T_i \quad (i=1, 2, \dots, m)$$

O princípio de equivalência pode então, enunciar-se:

O sistema dado é equivalente ao que se obtém, substituindo uma equação - por exemplo, a de ordem i - pela equação

$$X_i + Q(D)X_k = T_i + Q(D)T_k \quad (\alpha)$$

designando $Q(D)$ um qualquer polinómio de derivação e podendo ser $k = 1, 2, \dots, m$

A equivalência dos dois sistemas, -o inicial e o assim obtido, -decorre imediatamente das seguintes observações:

- a) se existe um sistema de distribuições (S_1, S_2, \dots, S_n) , que verifique o 1º sistema de equações ela verifica também a precedente equação (α), porque torna X_i igual a T_i , e X_k igual a T_k , e verifica portanto o 2º sistema.
- b) por sua vez, podemos regressar do 2º sistema ao inicial, por uma operação perfeitamente análoga, que consiste em somar a ambos os membros da equação de ordem i , ordenadamente, os dois membros da equação de ordem k (equações consideradas no 2º sistema)), multiplicadas por $-Q(D)$.

Portanto, toda a solução do 2º sistema é solução ainda do sistema dado e os dois sistemas são, de facto, equivalentes.

.....

Ao estudar o sistema

$$\sum_{j=1}^n P_{ij}(D)S_j = T_i \quad (i=1, 2, \dots, m),$$

podemos desde já supor que pelo menos um dos coeficientes de S_1 é diferente de zero; se todos êsses coeficientes fôsem nulos, a incógnita S_1 não existiria no sistema dado. Mediante eventual reordenação das equações, podemos sempre supor que êsse coeficiente não nulo de S_1 (cuja existência está assegurada) é precisamente o que figura na 1ª equação: será, então, $P_{11}(D) \neq 0$.

(Quer dizer, $P_{11}(x)$ não é polinómio idênticamente nulo)

Vamos agora ver que, aplicando o princípio de equivalência (de sistemas) anteriormente referido, é possível substituir o sistema dado por um outro sistema (equivalente), em que são nulos todos os coeficientes de S_1 nas restantes equações, -isto é, consegue-se eliminar S_1 em todas as outras equações. Supondo que já são todos nulos êsses restantes coeficientes de S_1 - nada mais é preciso fazer; mas se há um não-nulo, podemos então supor, sem quebra de generalidade, que figura na 2ª equação: $P_{21}(D) \neq 0$;

podemos mesmo supôr que o gráu de $P_{11}(x)$ é superior ou igual ao de $P_{21}(x)$. (Se assim não fôsse, bastaria trocar os índices das equações para a situação ser a que admitimos).

Podemos então determinar o quociente, $Q_1(x)$, e o resto, $R_1(x)$, do polinómio $P_{11}(x)$ pelo polinómio $P_{21}(x)$. Sabemos já que as regras usuais de cálculo para os polinómios se mantêm para os polinómios em D : então, se aos dois membros da 1ª equação do sistema adicionarmos, ordenadamente, os dois membros da 2ª equação, multiplicados por $-Q_1(x)$, obtem-se uma equação em que o coeficiente de S_1 é $R_1(D)$.

Na verdade, tendo em vista que

$$P_{11}(D) - Q_1(D) \cdot P_{21}(D) = R_1(D),$$

efectuando as operações indicadas sôbre as equações

$$P_{11}(D)S_1 + \dots = T_1$$

$$P_{21}(D)S_1 + \dots = T_2,$$

obtem-se a equação

$$R_1(D)S_1 + \dots = T_1 - Q_1(D)T_2$$

Quer dizer: substituímos deste modo a 1ª equação por outra, cujo coeficiente de S_1 tem certamente gráu inferior ao que apresentamos naquela. Agora, procedendo para o par de equações obtidas como para o anterior e assim sucessivamente, iremos necessariamente cair num resto nulo, -porque estamos afinal a seguir o método do algoritmo de Euclides ("das divisões sucessivas"). O último polinómio não nulo que se obtém é o m.d.c. dos dois primeiros: por conseguinte, no final, uma das equações terá coeficiente não-nulo de S_1 , enquanto na outra êsse coeficiente ficará nulo.

Coloquemos a 1ª dessas equações (onde S_1 persiste), em 1ª lugar. Trabalhando agora com esta "nova" equação e com a 3ª do sistema dado, de maneira análoga se consegue anular o coeficiente de S_1 numa delas; e procedendo assim sucessivamente, acabaremos certamente por eliminar S_1 de todas as equações excepto uma, que colocamos em 1ª lugar.

Podê acontecer que, ao proceder daquele modo, se tenham

eliminado automaticamente S_2, S_3, \dots, S_n em todas as outras equações, isto é, se tenham reduzido a zero todos os respectivos coeficientes. Se isso acontecer já não seria preciso ir mais longe na nossa análise. Porém, se assim não fôr, podemos sempre admitir (à parte eventual reordenação das incógnitas) que um dos coeficientes que ainda não são nulos é o de S_2 na 2ª equação. Raciocinando então para as restantes equações como fizemos para o sistema inicial, chega-se à conclusão de que se pode eliminar S_2 em todas elas menos numa. Aplicando este processo sucessivamente às várias incógnitas restantes, chegaremos por fim a um sistema do seguinte tipo:

$$(2) \left\{ \begin{array}{l} Q_{11}(D)S_1 + Q_{12}(D)S_2 + \dots + Q_{1p}(D)S_p + \dots + Q_{1n}(D)S_n = T_1 \\ \dots \\ Q_{22}(D)S_2 + \dots + Q_{2p}(D)S_p + \dots + Q_{2n}(D)S_n = T_2 \\ \dots \\ Q_{pp}(D)S_p + \dots + Q_{pn}(D)S_n = T_n \end{array} \right.$$

$$o = T_{p+1}$$

$$o = T_m$$

A presença, no final deste esquema, das equações $o = T_{p+1}, \dots, o = T_m$, corresponde à hipótese possível (já assinalada) em que, a partir de certa ordem, se eliminem automaticamente as incógnitas restantes em todas as equações que faltasse ainda considerar.

Bem entendido, - isso pode também não acontecer; é o caso em que $p = m$, - caso em que tais equações não aparecem. (E pode também acontecer que $m = n$).

Suponhamos $m > p$ Se porventura uma das distribuições T_{p+1}, \dots, T_m não fôr nula, a correspondente equação (em que essa distribuição aparece igualada a zero) é impossível: e como o sistema em que tal equação impossível figura é equivalente ao sistema inicial, este será também um sistema impossível.

Se assim não fôr, isto é, se todas as distribuições T_{p+1}, \dots, T_m forem nulas, aquelas últimas $n-p$ equações do sistema (2) são "identidades", não têm pois interesse no que toca à resolução do sistema. Este caso corresponde a haver no sistema dado

$n-p$ equações dependentes das restantes, que automaticamente o processo de redução que praticamos eliminou. (Por ex., no caso de circuitos eléctricos, se tivesse havido um engano e se tivesse escrito uma equação dependente das outras, -pelo processo estudado tal equação seria eliminada).

Sendo $n > p$, passam-se as incógnitas S_{p+1}, \dots, S_n para os segundos membros e arbitram-se os seus "valores": o sistema terá assim uma origem suplementar de indeterminação.

Volvendo agora à hipótese $m > p$, suponhamos que as últimas $m-p$ equações são igualdades triviais que se suprimem, e que já se passaram para os segundos membros das p equações subsistentes as incógnitas S_{p+1}, \dots, S_n . Designemos então por T_1^*, \dots, T_p^* os respectivos segundos membros.

Nestas circunstâncias, a última equação ficará a ser

$$Q_{pp}(D)S_p = T_p^*$$

Trata-se pois de uma equação diferencial linear numa só incógnita! Ora, este caso já foi estudado: podemos determinar o integral geral respectivo pela fórmula já apontada. [Começáramos por calcular as raízes da equação $Q_{pp}(x) = 0$, e efectuar a decomposição de $Q_{pp}(x)$ em factores lineares; etc - obtendo finalmente a totalidade das soluções S_p , mediante a fórmula estabelecida (pág. 121)].

Depois, prossegue-se na resolução do sistema, substituindo, na penúltima equação deste, S_p pela sua expressão já obtida, e isolando no 1º membro o termo em S_{p-1} : ficamos assim com uma equação diferencial linear na única incógnita S_{p-1} , equação que sabemos integrar, -e assim, por recorrência, acabamos por obter as expressões gerais de todas as incógnitas, expressões essas que constituem o integral geral do sistema dado. Ficamos a conhecer ao mesmo tempo o número de constantes arbitrárias independentes que contém aquele integral geral. Por exemplo, a última equação

$$Q_{pp}(D)S_p = T_p^*$$

apresenta no seu integral geral, constantes arbitrárias em número igual ao grau do polinómio $Q_{pp}(x)$. De um modo geral, designemos por μ_i o grau do polinómio $Q_{ii}(x)$.

Com esta notação, o número de constantes arbitrárias presentes no integral geral da equação de ordem p é μ_p ; será μ_{p-1} o número de constantes que o integral geral da equação de ordem $p-1$ contém, etc, na totalidade, é certamente

$$\mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_p$$

o número de constantes arbitrárias que figuram no integral geral do sistema dado.

Repare-se também neste facto importante: é que se fôr efectivamente $n > p$, o integral geral do sistema dado dependerá, não sómente daquelas constantes arbitrárias, mas também de $n-p$ distribuições arbitrárias, S_{p+1}, \dots, S_n .

Está assim esclarecido inteiramente o problema da determinação do integral geral.

De resto é sabido que, em geral, o cálculo do integral é um problema de resolução mais fácil do que os problemas que se lhes seguem: determinação da solução que verifica certas condições, - condições iniciais, ou (problema mais delicado ainda) as chamadas condições nos limites.

No caso do sistema estudado,

$$\sum_{j=1}^n P_{ij}(D)S_j = T_i \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

uma vez determinado o integral geral, se fôsem dadas condições iniciais, podíamos determinar as constantes de modo que aquelas condições se verificassem. Mas isto, no caso geral, varia um sistema de equações de penosa resolução. Ora, o método da truncatura de que já fizemos uso permite-nos chegar muito mais comodamente ao resultado, como vamos ver.

Suponhamos que é dado o sistema

$$\sum_{j=1}^n P_{ij}(D)S_j = T_i$$

com as condições iniciais definidas do modo seguinte: designemos por m_i o maior dos graus dos polinómios $P_{ij}(x)$, para $i = 1, 2, \dots, m$; as soluções do sistema são impostas as con-

dições iniciais seguintes:

$$S_i^{(k)}(0^-) = c_{ik}, \text{ sendo } i=1,2,\dots,m \\ k=1,2,\dots,m_i$$

e designando $S_i^{(k)}$ a derivada de ordem k da distribuição incógnita, S_i .

Quer dizer: impõem-se os limites à esquerda da origem das incógnitas, e das suas derivadas até certa ordem: (Supõe-se que à esquerda da origem, as distribuições T_i se reduzem a funções localmente somáveis, com derivadas até uma ordem conveniente, se tal fôr necessário).

Mas desde logo surge uma questão bastante delicada, que muito deu que pensar: é que aquelas condições iniciais em geral não podem ser independentes, -não podem ser fixadas arbitrariamente.

Suponhamos que se aplica o já referido método da truncatura: multiplicam-se então ambos os membros de cada uma das equações do sistema por H , o que permite passar a um sistema da forma:

$$\sum_{j=1}^n P_{ij}(D)(S_j H) = \bar{T}_i$$

sendo \bar{T}_i a soma de T_i com uma combinação linear de derivadas de δ , conforme se viu na última lição. Procedendo como foi indicado, podemos determinar as distribuições $S_j H$.

Analogamente, poderíamos agora multiplicar à direita as equações do sistema dado por $H^{**} [= 1-H]$, para determinar a parte negativa de cada incógnita, $S_j H^{**}$.

Representemos então, de um modo geral, por S_j^1 a expressão obtida para $S_j H$, e por S_j^2 a expressão obtida para $S_j H^{**}$.

É fácil ver, raciocinando como na última lição, que as distribuições

$$S_j^1 + S_j^2 \quad (j=1,2,\dots,n)$$

constituem uma solução do sistema dado -mas pode acontecer tais distribuições não verifiquem as condições iniciais se estas forem dadas arbitrariamente: e isto, mesmo no caso em que

$$m=n=p .$$

Como determinar à-priori as relações obrigatórias entre as condições iniciais? É o que vamos ver agora, limitando-nos, para maior simplicidade, ao caso em que os polinómios de derivação são de grau não superior a 2, -que é o caso dos sistemas de equações da electrotecnia.

Isto é, vamos supor que

$$P_{ij}(D) = a_{ij}D^2 + b_{ij}D + c_{ij}$$

sendo a_{ij}, b_{ij}, c_{ij} constantes (escalares) conhecidas.

Então, prova-se que, aplicando o já referido princípio de equivalência, é sempre possível substituir o sistema proposto por um sistema da forma

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=1}^n (a_{ij}D^2 + b_{ij}D + c_{ij})S_j = T_i \quad (i=1, \dots, \lambda) \\ \sum_{j=1}^n (b_{kj}D + c_{kj})S_j = T_k \quad (k=\lambda+1, \dots, \mu) \\ \sum_{j=1}^n c_{ej}S_j = T_e \quad (e=\mu+1, \dots, m) \end{array} \right.$$

e sendo diferente de zero o determinante

$$\begin{vmatrix} a_{ij} \\ b_{kj} \\ c_{ej} \end{vmatrix}$$

(Este determinante supõe-se constituído pelas λ linhas de coeficientes de D^2 nas primeiras λ equações do sistema (3); pelas $\mu - \lambda$ linhas de coeficientes de D presentes nas $\mu - \lambda$ equações seguintes do mesmo sistema, e pelas $m - \mu$ linhas de coeficientes de incógnitas presentes nas restantes equações)

Obtém-se pois um sistema formado por um certo número de equações diferenciais que são efectivamente de 2ª ordem e que não podem reduzir-se a equações de certa ordem inferior; um certo número de equações diferenciais que são apenas de 1ª

ordem, e por fim, equações de ordem 0, isto é, equações meramente algébricas.

Como conseguir este resultado na prática? Suponhamos dado o sistema inicial: procuremos suprimir D^2 numa das equações. Bastará somar ordenadamente aos dois membros de uma delas, os dois membros de outra multiplicados por uma constante conveniente, (um escalar). E pode até acontecer que, ao tentar suprimir D^2 para um dos coeficientes, desapareça em todos os outros. De qualquer modo, há que fixar o facto seguinte: em geral, no problema em causa (quando referente a circuitos eléctricos) não é necessário efectuar derivações, basta empregar como factores números, e não polinómios em D. (Nos casos que se apresentam concretamente em problemas de Electrotecnia, parece estar mesmo demonstrado já que nunca é preciso, para o fim apontado, empregar derivações).

Repare-se porém em que pode acontecer, em particular, ser $\lambda = m$, isto é, que todas as equações sejam efectivamente de 2ª ordem, sem que seja possível baixar essa ordem.

Então o sistema dir-se-á irreductível. Quando $m=n$, isso acontece em particular quando o determinante constituido pelos coeficientes de D^2 para todas as incógnitas é diferente de zero. É então inútil tentar o abaixamento de ordem das equações: não se conseguirá substituir equação alguma por outra de ordem inferior. É aliás esse o caso mais simples: para resolver o sistema dado, bastará aplicar a regra de Cramer, tratando D como um símbolo numérico.

E em tal caso as constantes que figuram nas condições iniciais podem então ser perfeitamente arbitrárias.

Voltemos ao caso geral: suponhamos que, depois de feitas as possíveis reduções de ordem, existe pelo menos uma equação diferencial de 1ª ordem no sistema:

$$\sum_{j=1}^n (b_{kj}D + c_{kj})S_j = T_k$$

Então, se considerarmos os limites à esquerda da origem de S_j e de T_k , esses limites devem obviamente verificar aquela mesma equação, isto é: deve ter-se

$$\sum_{j=1}^n [b_{kj} S'_j(o^-) + c_{kj} S_j(o^-)] = T_k(o^-)$$

Designando por C_{ji} e por C_{jo} , respectivamente, os limites $S'_j(o^-)$ e $S_j(o^-)$, as condições a que estes são obrigados escrevem-se:

$$(4) \quad \sum_{j=1}^n [b_{kj} C_{ji} + c_{kj} C_{jo}] = T_k(o^-)$$

Quer dizer se as distribuições S_j verificam de facto o sistema dado, necessariamente ocorrem as precedentes relações (4) entre os valores C_{ji} e C_{jo} dos limites laterais das incógnitas e suas derivadas. Tais limites não podem pois ser independentes: verificam aquelas $\mu - \lambda$ equações de condição.

Suponhamos agora que, sendo $m > n$, há pelo menos uma equação algébrica (equação diferencial de ordem 0); então uma relação a verificar necessariamente pelos limites das incógnitas S_j à esquerda da origem será

$$\sum_{j=1}^n c_{ej} S_j(o^-) = T'_e(o^-)$$

Haverá assim, pois, no caso geral, mais $m - \lambda$ relações obrigatórias entre os dados iniciais.

Prova-se que as relações indicadas entre as constantes ocorrentes nas condições iniciais são independentes e são tôdas aquelas que se devem verificar. Isto é, -prova-se que se as constantes iniciais forem tomadas de modo a verificarem-se aquelas relações, então as expressões que obtivermos para as incógnitas S_j pela aplicação do método exposto verificam de facto, além do sistema dado, as respectivas condições iniciais.

Não faremos aqui a demonstração do que acaba de afirmar-se; o que se disse é suficiente para aplicar praticamente o método simbólico à integração de sistemas de equações diferenciais do tipo estudado. ⁽¹⁾

Segundo o critério há pouco referido, obtêm-se todas as relações que devem condicionar os dados iniciais, relações essas que são sempre independentes. Posto isto, a resolução do sistema é fácil: pode fazer-se pelos métodos habituais, tratando D como símbolo numérico, -depois, é claro, de ter efectuado a

(1) Cf. memória citada de A. César de Freitas, a publicar oportunamente

truncatura das incógnitas para introduzir nas equações os dados iniciais.

Pelo que se disse, é já possível avaliar quanta comodidade advém do recurso ao método simbólico no caso estudado. É também fácil reconhecer a sua enorme vantagem em relação ao emprego da transformação de Laplace: até porque este método exige restrições severas sobre os segundos membros das equações, e afinal de contas não justifica em nada o que se faz ao aplicá-lo. Quer dizer: seguindo tal método, aplica-se a transformação de Laplace (quando isso é possível) aos dois membros de cada equação em causa, acham-se as soluções regressando das imagens aos originais, e procede-se depois à substituição dessas soluções nas equações dadas, para ver se se trata efectivamente de soluções, e se são verificadas as respectivas condições iniciais. Em resumo - o processo não é de modo algum fundamentado. [Poderia até reputar-se preferível o uso do método de Heaviside confinado ao seu aspecto heurístico, - que os repetidos êxitos da experiência tornavam digno de "confiança"] .

Pelo contrário, podemos ter a certeza de que, procedendo como foi indicado, chegaremos às soluções do sistema dado, sendo certo ainda que tais soluções verificam as condições iniciais correspondentes. Associada a esta segurança, há que focar ainda no método simbólico, a sua simplicidade de aplicação efectiva, o seu aspecto "prático".

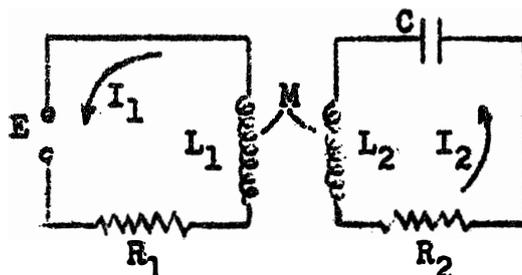
Será agora interessante mostrar que a intervenção das distribuições (na integração de sistemas de equações diferenciais lineares) não se traduz apenas em maior comodidade, a qual oferece aliás ainda um aspecto decisivo que importa mencionar: na aplicação do método exposto, podemos empregar polinómios de derivação quantas vezes quizermos, sem preocupação restritiva alguma, porque as distribuições são sempre deriváveis; se se tratasse de funções (únicas que intervêm no método clássico da transformação de Laplace), seriam necessárias precauções permanentes no que toca à derivabilidade das funções em causa até à ordem necessária.

Pode mostrar-se que a intervenção das distribuições não é aqui apenas um recurso de comodidade, - é, em certos casos im-

prescindível, neste sentido: há fenómenos cuja interpretação correcta só pode ser feita por meio das distribuições.

Já tínhamos visto exemplos desse facto no caso particular da distribuição \underline{d} ; mas o mesmo caso pode ocorrer com derivadas de \underline{d} . Vamos estudar um exemplo concreto, no caso simples de um circuito eléctrico.

Seja a associação magnética de circuitos:



As leis de Kirchhoff dão neste caso, tomando para incógnitas as cargas Q_1, Q_2 , em vez das respectivas intensidades I_1, I_2

$$\begin{cases} (L_1 D^2 + R_1 D) Q_1 + M D^2 Q_2 = E \\ M D^2 Q_1 + (L_2 D^2 + R_2 D + \frac{1}{C}) Q_2 = 0 \end{cases}$$

Se o determinante

$$\begin{vmatrix} L_1 & M \\ M & L_2 \end{vmatrix} = L_1 L_2 - M^2$$

fôr diferente de zero o sistema é irreduzível: não é possível substituí-lo por um outro equivalente, em que uma das equações seja, por ex., de 1ª ordem e a outra de 2ª ordem. Portanto, neste caso, os dados iniciais podem ser inteiramente arbitrários e, uma vez introduzidos no sistema pelo processo da truncatura, a resolução pode fazer-se, por ex., pela regra de Cramer.

Mas suponhamos agora que se tem

$$L_1 L_2 - M^2 = 0$$

(Diz-se neste caso que a indutância mútua é perfeita).

Suponhamos além disso que as resistências R_1, R_2 são desprezáveis:

$$R_1 = R_2 = 0$$

Então, adicionando ordenadamente, a ambos os membros da 2ª equação multiplicados por M_1 , os da 1ª equação multiplicados por $-L_2$, vem o sistema equivalente

$$\begin{cases} L_1 D^2 Q_1 + M D^2 Q_2 = E \\ \frac{M}{C} Q_2 = -L_2 E \end{cases}$$

que já não pode reduzir-se mais, supondo $L_1 \neq 0$ e $C \neq \infty$. A segunda equação mostra que tem de ser, necessariamente

$$Q_2(0^-) = -\frac{L_2 C}{M} E(0^-)$$

e é esta, afinal, a única condição a impôr aos dados iniciais: os restantes valores $Q_1(0^-)$, $I_1(0^-)$, $I_2(0^-)$, podem ser arbitrários. A resolução poderia pois fazer-se muito simplesmente, introduzindo estes dados, no sistema por truncatura.

Coloquemo-nos agora no caso extremamente simples em que os referidos valores iniciais são nulos e se tem $E=0$, para $t < 0$. Então será também $Q_1 = R_2 = 0$ para $t < 0$ (sistema em repouso para $t < 0$) e a resolução faz-se imediatamente:

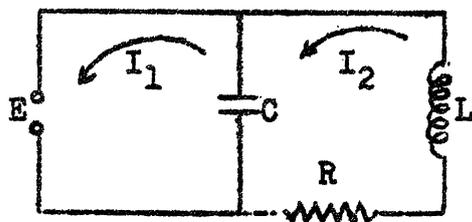
$$\begin{cases} Q_2 = -\frac{L_2 C}{M} E \\ Q_1 = -\frac{1}{L_1} (D^{-2} E + L_2 C E) \end{cases}$$

Suponhamos que, num dado instante, p.ex. na origem, a força electro-motriz E apresenta um salto. Então o mesmo acontecerá com as cargas Q_1 e Q_2 . Deste modo, as intensidades

$I_1 = DQ_1$, $I_2 = DQ_2$ terão componentes impulsivas (múltiplos de δ), e as respectivas derivadas, $D^2 Q_1$, $D^2 Q_2$, que figuram nas equações precedentes conterão múltiplos de δ' .

Note-se ainda que, em certos casos (parasitas de duração muita curta, anulamento brusco duma corrente por meio dum interruptor, etc. etc.) se apresentam naturalmente forças electro-motrizes com carácter impulsivo.

Um outro exemplo simples é o do circuito figurado no seguinte esquema:



Neste caso a 1ª célula dá uma equação algébrica e a 2ª uma equação diferencial de 2ª ordem:

$$\begin{cases} \frac{1}{C} (Q_1 - Q_2) = E \\ LD^2Q_2 + RDQ_2 + \frac{1}{C} (Q_2 - Q_1) = 0 \end{cases}$$

É fácil ver que este sistema já está reduzido à forma (3) (pág.129).

Basta notar que é diferente de zero o determinante

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{C} & -\frac{1}{C} \\ L & 0 \end{vmatrix} = \frac{L}{C}$$

(Supomos C finito).

Neste caso os valores iniciais devem satisfazer à seguinte condição

$$Q_1(0^-) - Q_2(0^-) = CE(0^-)$$

A resolução do sistema é agora muito fácil. A carga Q_1 pode apresentar saltos, se o mesmo acontecer a E.

De resto, em casos mais complicados, a resolução dum sistema pelo método geral atrás indicado obriga a derivar várias vezes termos conhecidos, o que, se houver, por exemplo, saltos nestes termos, introduz derivadas de distribuições de Dirac.

.....

Vejamos ainda como trabalhar directamente com as equações da electrotecnia sob a forma integro-diferencial, tomando como incógnitas as intensidades e não as quantidades de electricidade. Basta considerar o caso dum circuito com uma só malha:

$$LDI + RI + \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t I(\tau) d\tau = E,$$

o que também se pode escrever (provisoriamente) sob a forma

$$LDI + RI + \frac{1}{C} Q = E$$

Então, se for $I(0^-) = c_1$, efectuando a truncatura, vem

$$(\alpha) \quad LD(IH) + R(IH) + \frac{1}{C}(QH) = EH + Lc_1 \delta$$

Ora é fácil reconhecer que

$$QH = Q(0^-) + \int_0^t IH(\tau) d\tau = c_0 H + D^{-1}(IH),$$

pondo $Q(0^-) = c_0$. Então a equação (α) assumirá a forma equivalente

$$LD(IH) + R(IH) + \frac{1}{C} D^{-1}(IH) = EH + Lc_1 \delta - \frac{c_0}{C} H$$

ou abreviadamente

$$R(IH) = \bar{E}$$

onde $R = LD + R + \frac{1}{C} D^{-1}$ (resistência simbólica). É claro que, a partir deste ponto, se pode trabalhar com D segundo as regras usuais de cálculo. É análogamente para os sistemas.

Esta foi uma primeira aplicação, muito modesta, do cálculo simbólico: até aqui, trabalhamos exclusivamente com funções racionais do operador D . Mas podem apresentar-se problemas em que não baste a consideração daquelas funções elementares de D . Por exemplo, - a integração de certas equações em derivadas parciais.

Suponhamos que se trata da equação

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - k^2 \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0,$$

equação homogénea do tipo parabólico. (É desta forma, por exemplo, a equação da propagação do calor, num caso particular).

Podemos pensar em integrá-la, encarando apenas x como variável, e considerando t como um parâmetro. Representemos por D a derivação em ordem a t . A equação dada assume então a forma

$$\frac{d^2 \varphi}{dx^2} - k^2 D \varphi = 0,$$

tratando D como um símbolo numérico. Então, passamos a ter não já uma equação em derivadas parciais, mas sim uma equação diferencial-ordinária. O integral geral desta equação determinar-se-ia pois, resolvendo a "equação característica"

$$x^2 - k^2 D = 0,$$

Como as "raízes" desta são $\pm k\sqrt{D}$, aquele integral geral seria

$$\varphi = e^{\sqrt{D} kx} C_1 + e^{-\sqrt{D} kx} C_2,$$

onde C_1 e C_2 designam funções arbitrárias do parâmetro t . (ainda poderíamos exprimir φ em senos e cossenos hiperbólicos).

Em conclusão: procedendo formalmente como se x fôsse a única variável, e tratando portanto D como símbolo numérico, somos naturalmente conduzidos a trabalhar com "funções transcendentess" de D , tais como $e^{-\sqrt{D} kx}$

Levanta-se pois o problema de fundamentar em bases logicamente seguras o cálculo do operador D para certas funções analíticas, que já não são apenas funções racionais.

Ora, para isso, é necessário recorrer à transformação de Laplace, mas de maneira muito diferente da clássica: será a transformação de Laplace tratada mediante a teoria das distribuições, e num sentido bastante diverso. Este assunto será possivelmente abordado no final destas lições.